

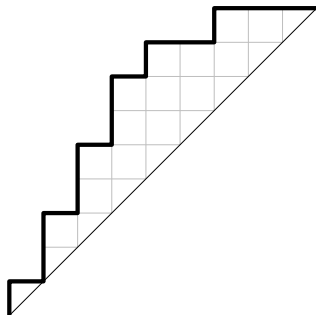
Des intervalles de Tamari généralisés aux cartes planaires non-séparables

Wenjie Fang, IRIF et LaBRI.

Travail joint avec Louis-François Préville-Ratelle à Université de Talca

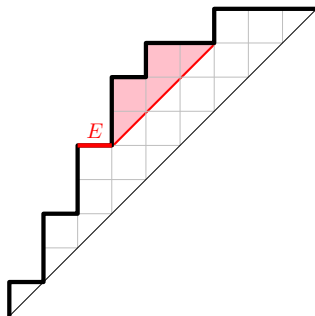
Journée Cartes, 14 avril 2016, IHÉS

Chemins de Dyck et treillis de Tamari, ...



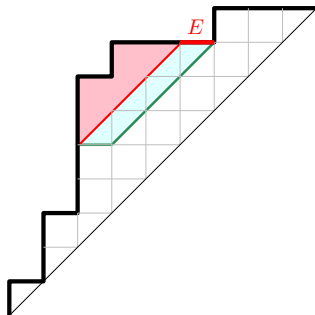
Un **chemin de Dyck** de taille n : n pas Nord(N), n pas Est(E)

Chemins de Dyck et treillis de Tamari, ...



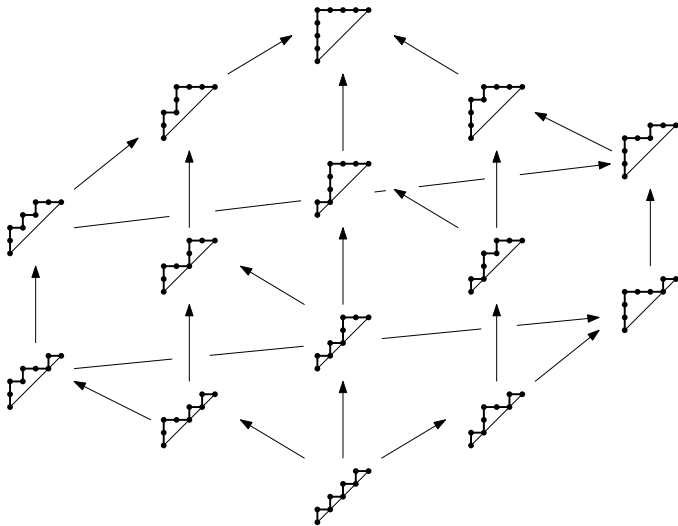
Une relation d'ordre : ...

Chemins de Dyck et treillis de Tamari, ...

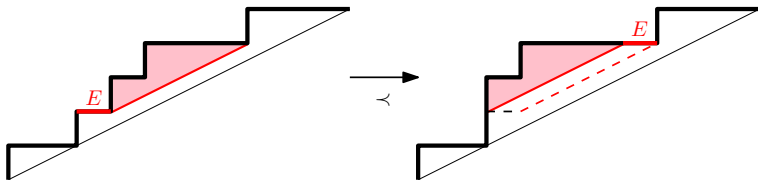


Une relation d'ordre : le **treillis de Tamari** (Huang-Tamari 1972).

Treillis de Tamari, $n = 4$



..., treillis de m -Tamari, ...



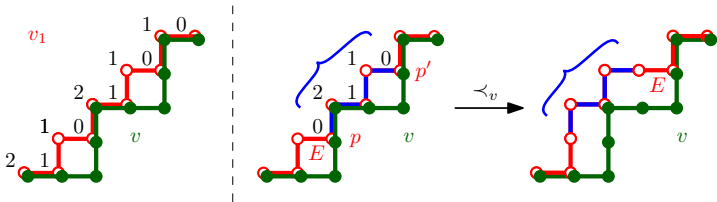
Considérons les chemins m -Dyck de taille n (n pas Nord, mn pas Est, au-dessus de la " m -diagonale").

Une relation d'ordre similaire donne le **treillis de m -Tamari** (Bergeron 2010).

Ces objets sont reliés à des structures algébriques profondes (l'espace de Garsia-Haiman, etc.).

... et plus.

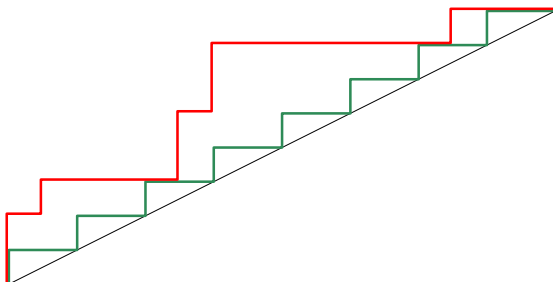
Pourquoi se poser sur une droite ? On peut choisir un chemin arbitraire comme "diagonale" !



Distance horizontale = # de pas Est avant de dépasser v

Préville-Ratelle et Viennot (2014) ont défini le **treillis de Tamari généralisé** $\text{TAM}(v)$ pour un chemin arbitraire v (appelé la **canopée**).

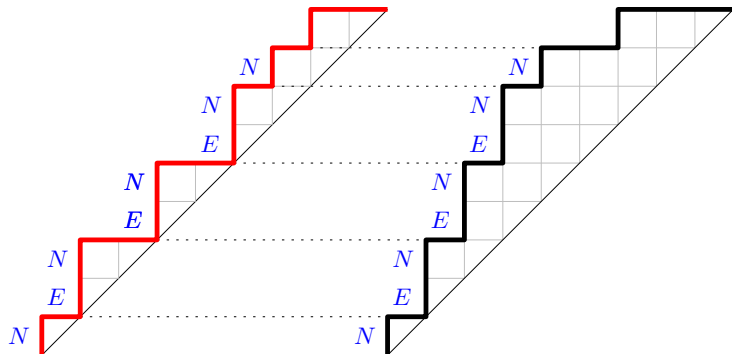
... et plus.



$$\text{TAM}((NE^m)^n) \simeq \text{treillis } m\text{-Tamari}$$

Type d'un chemin de Dyck

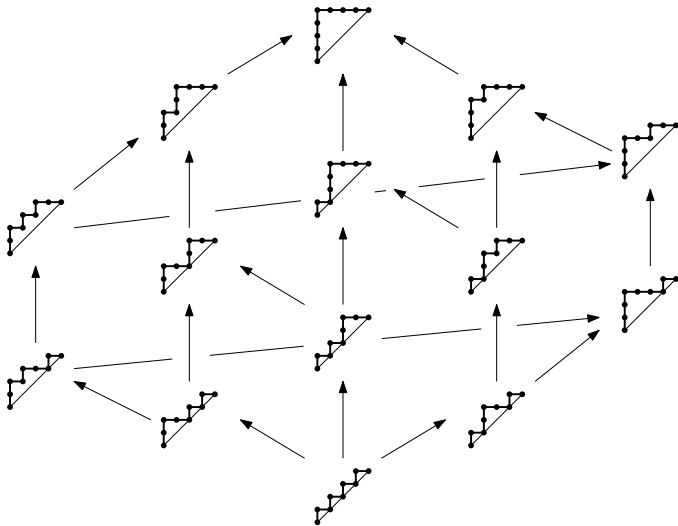
Pas Nord: suivi par un pas Est $\rightarrow N$, suivi par un pas Nord $\rightarrow E$.
 C'est inversé !



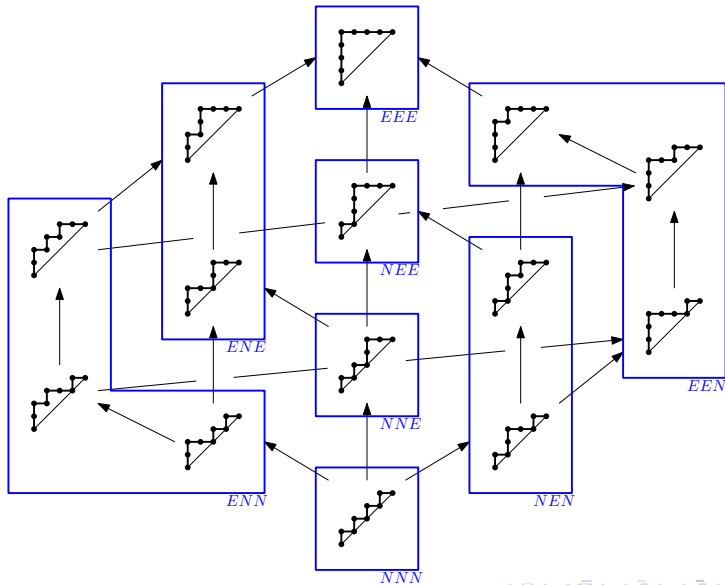
Type: $NENENENN$

Les deux chemins sont **synchrones**.

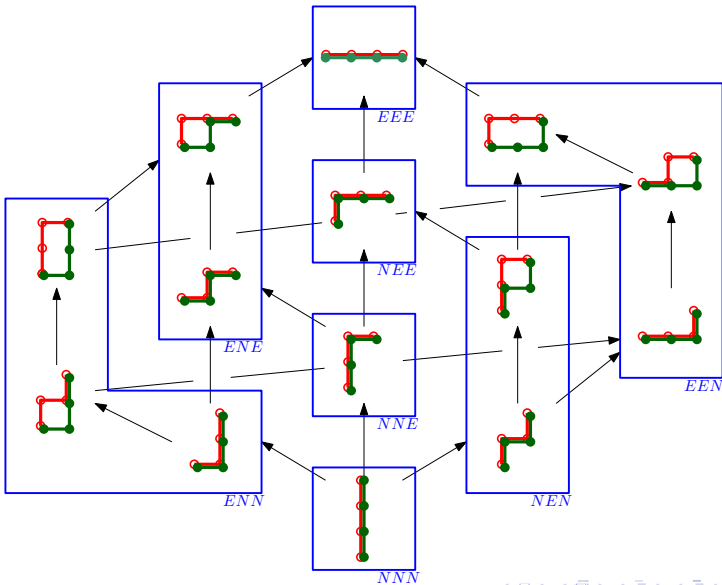
Une partition du treillis de Tamari



Une partition du treillis de Tamari



Une partition du treillis de Tamari



Une partition du treillis de Tamari

Préville-Ratelle et Viennot (2014):

Théorème

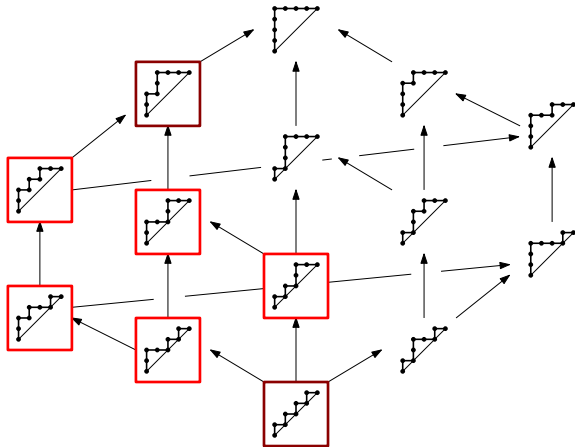
Le type de chemin partitionne le treillis de Tamari de taille n en les 2^{n-1} treillis de Tamari généralisés $\text{TAM}(v)$ pour les v de longueur $n - 1$.

Théorème

Le treillis $\text{TAM}(v)$ est isomorphe au dual de $\text{TAM}(\overleftarrow{v})$, où \overleftarrow{v} est le mot v lu à l'envers avec la substitution $N \leftrightarrow E$.

Un intervalle dans $\text{TAM}(v)$ avec v de longueur $n \Leftrightarrow$ un intervalle dans le treillis de Tamari de taille $n + 1$ formé par deux chemins de Dyck synchrones (**intervalle synchrone**).

Intervalles dans un treillis



Un intervalle = un couple d'éléments (a, b) avec $a \preceq b$.

Intervalles et cartes planaires

Chapoton(2006): # intervalles du treillis de Tamari de taille $n =$

$$\frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}$$

$=$ # triangulations planaires 3-connexes avec $n+3$ sommets (Tutte 1963)

(preuve bijective par Bernardi et Bonichon 2009)

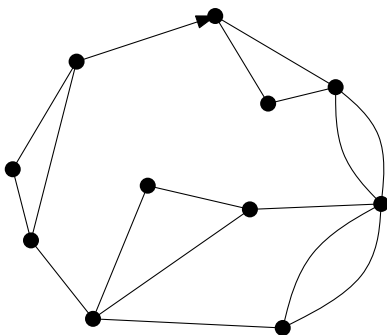
Bousquet-Mélou, Fusy and Préville-Ratelle (2011): # intervalles du treillis m -Tamari de taille $n =$

$$\frac{m+1}{n(mn+1)} \binom{n(m+1)^2+m}{n-1}$$

Similaire aux formules des cartes planaires !

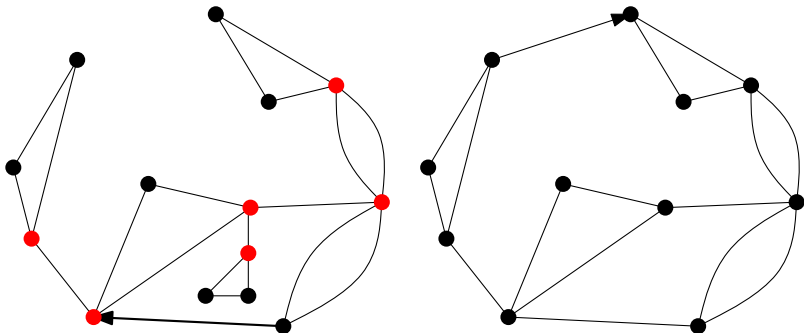
But : relier les intervalles synchrones aux cartes planaires.

Cartes planaires



Une **carte planaire** est un plongement d'un graphe connexe dans le plan, défini à un homéomorphisme près. Elle est **enracinée** en une arête de la face extérieure en sens horaire.

Cartes planaires non-séparables



Un **sommet d'articulation** coupe la carte en deux ensembles connexes d'arêtes.

Une **carte planaire non-séparable** est une carte planaire sans sommet d'articulation.

Nos résultats

Théorème (W.F. et L.-F. P.-R.)

Il y a une bijection combinatoire entre les intervalles synchrones de taille n et les cartes planaires non-séparables à $n + 1$ arêtes.

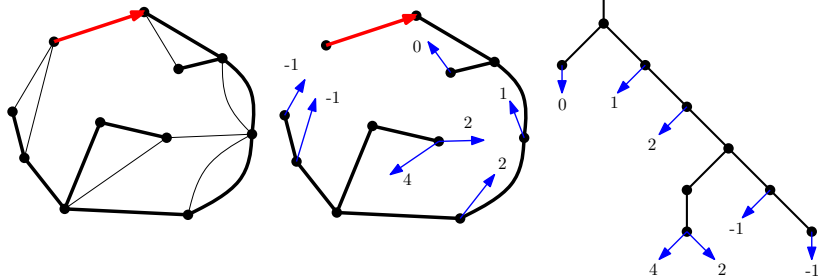
Corollaire

La somme des nombres d'intervalles dans $\text{TAM}(v)$ pour tous les v de longueur n est

$$\sum_{v \in (N, E)^n} \text{Int}(\text{TAM}(v)) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \binom{3n+3}{n}.$$

Enumération des cartes planaires non-séparables : Tutte (1963)

Une procédure d'exploration



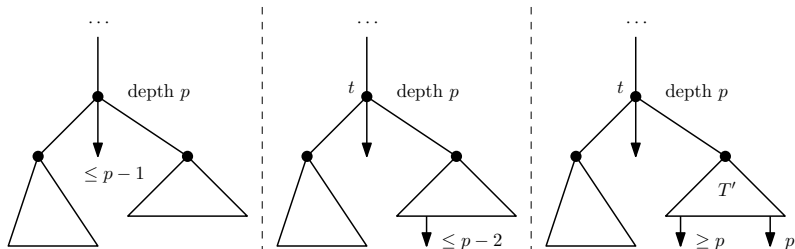
Propriété

Si l'exploration d'une arête e adjacente à un sommet u nous mène à un sommet w déjà visité, alors w est un ancêtre de u .

Arbres décorés

Un **arbre décoré** est un arbre plan avec des étiquettes ≥ -1 sur les feuilles telles que (la racine est de profondeur 0):

- 1 (Exploration) Soit ℓ une feuille d'un noeud en profondeur p , alors l'étiquette de ℓ est $\leq p - 1$;
- 2 (Non-séparabilité) Pour un noeud t de profondeur $p > 0$, il a au moins une feuille descendante avec une étiquette $\leq p - 2$;
- 3 (Planarité) Soit t un noeud de profondeur p et T' un sous-arbre direct de t . Si une feuille ℓ dans T' est étiquetée p , alors toute feuille dans T' qui précède ℓ porte une étiquette $\geq p$.

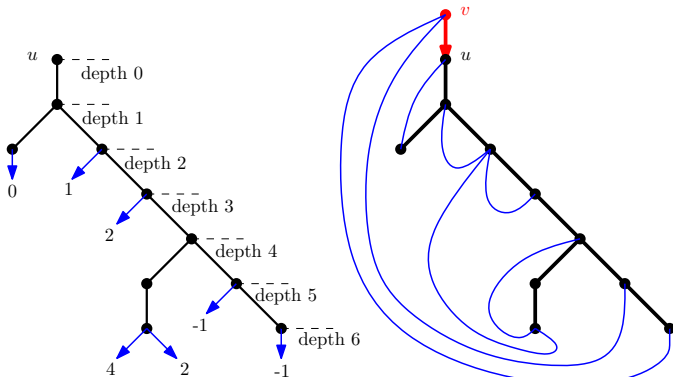


Des cartes aux arbres

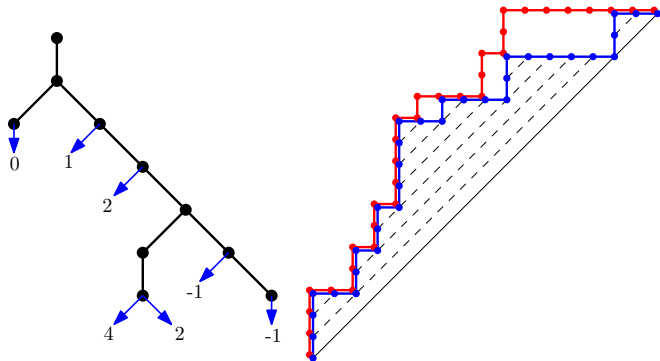
$\mathcal{M}_n :=$ ensemble des cartes planaires non-séparables avec $n + 1$ arêtes

$\mathcal{T}_n :=$ ensemble des arbres décorés avec n arêtes (flèches comprises)

- $T : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ la procédure d'exploration
- $S : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ la procédure (unique) de recollement

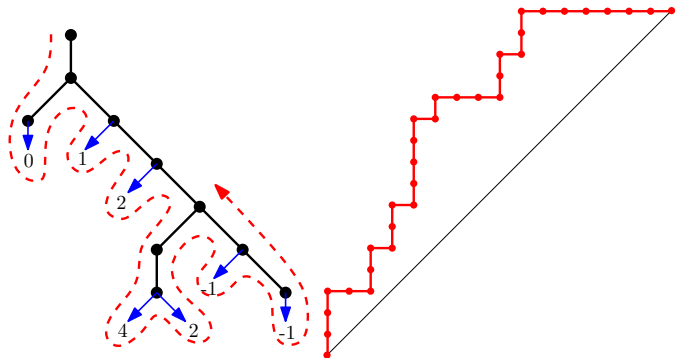


Des arbres aux intervalles synchrones



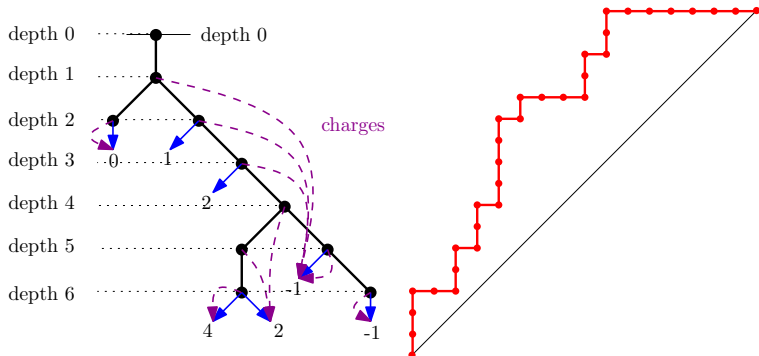
Conversion d'un arbre décoré T à un intervalle synchrone $[P(T), Q(T)]$

Des arbres aux intervalles synchrones



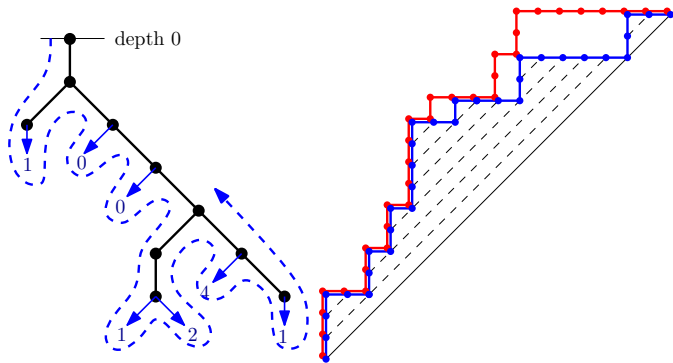
Chemin Q : un parcours

Des arbres aux intervalles synchrones



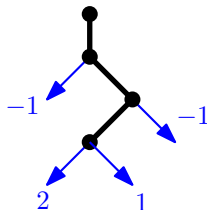
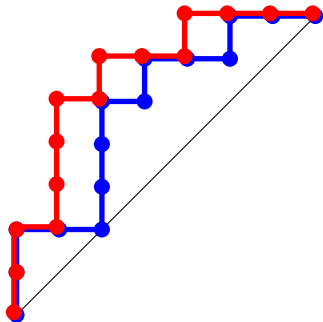
Chaque noeud de profondeur p charge la première feuille descendante avec étiquette $\leq p - 2$

Des arbres aux intervalles synchrones



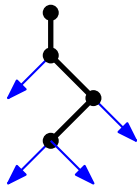
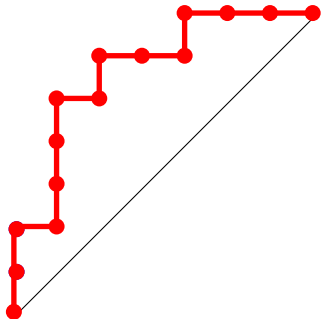
Chemin P : un codage différent où les pas Est sont des charges des feuilles plus 1

Des intervalles synchrones aux arbres



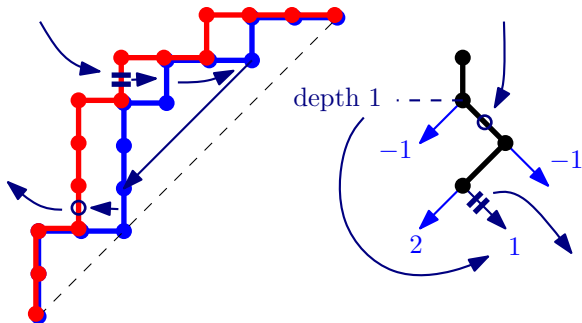
Conversion d'un intervalle synchrone $[P, Q]$ à un arbre décoré
 $T = R([P, Q])$

Des intervalles synchrones aux arbres



La structure de T est donnée par Q .

Des intervalles synchrones aux arbres



Étiquettes: on prend la fin des pas Est, dessine un rayon diagonal vers l'origine jusqu'à la rencontre de deux pas Nord, prend l'arête correspondante, et l'étiquette sera la profondeur du parent.

Nos résultats

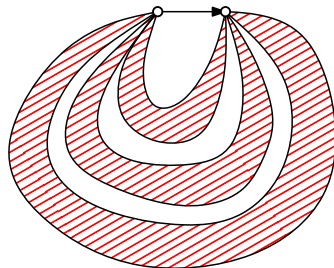
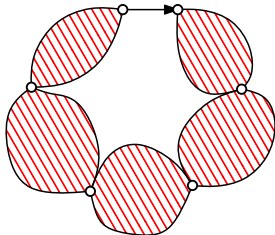
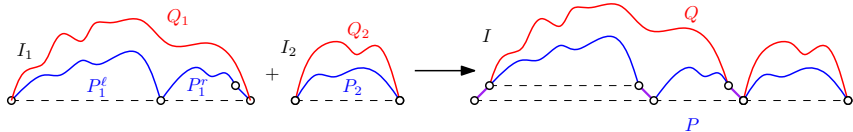
\mathcal{I}_n := ensemble des intervalles synchrones de longueur $2n$.

Théorème (W.F. et L.-F. P.-R.)

La composition $[P, Q] \circ T$ des deux bijections donne une bijection combinatoire entre \mathcal{M}_n et \mathcal{I}_n pour tout $n \geq 1$.

On a alors le résultat d'énumération, avec un raffinement sur plusieurs statistiques.

Décompositions récursives



La dualité

Notre bijection coïncide avec la bijection canonique selon des décompositions récursives des deux classes d'objets.

Théorème (W.F. et L.-F. P.-R.)

L'involution des intervalles synchrones induite par la symétrie centrale du treillis de Tamari devient la dualité des cartes planaires non-séparables sous notre bijection.

L'idée de preuve : induction sur une décomposition récursive.

Beaucoup de statistiques sont transférés par notre bijection.

Carte planeaire non-séparable M	Intervalle synchrone $[P, Q]$
deg. du sommet racine	# contacts de P
deg. de la face ext.	1 + longueur du dernier descent de Q
# comp. en parallèle	# contacts of Q
# comp. en série (racine changée)	1 + longueur du dernier descent de P

Discussion

- Aussi reliés aux arbres β -(1, 0) (Cori, Jacquard et Schaeffer) et l'involution mystérieuse de Claesson-Kitaev-Steingrímsson.
- D'autres structures équi-énumérées (e.g. permutations triables par deux piles en série) ?
- Restriction sur le treillis de Tamari (canopée $(NE)^n$) et de m -Tamari (canopée $(NE^m)^n$) pour une bijection similaire à celle de Bernardi et Bonichon?

Merci pour votre attention !