

Cartes aléatoires & processus de croissance-fragmentation



Igor Kortchemski (travail avec Jean Bertoin et Nicolas Curien)
CNRS & École polytechnique

Journées Cartes – novembre 2015 – ENS Lyon

Motivation

À quoi ressemble une **surface aléatoire** typique ?

↪ Idée : construire une **surface aléatoire** comme une limite de **surfaces discrètes** aléatoires.

↪ **Idée** : construire une **surface aléatoire** comme une limite de **surfaces discrètes** aléatoires.

On considère n **triangles**, et on les colle ensemble au hasard pour obtenir une surface homéomorphe à une sphère.

↪ Idée : construire une **surface aléatoire** comme une limite de **surfaces discrètes** aléatoires.

On considère n **triangles**, et on les colle ensemble au hasard pour obtenir une surface homéomorphe à une sphère.

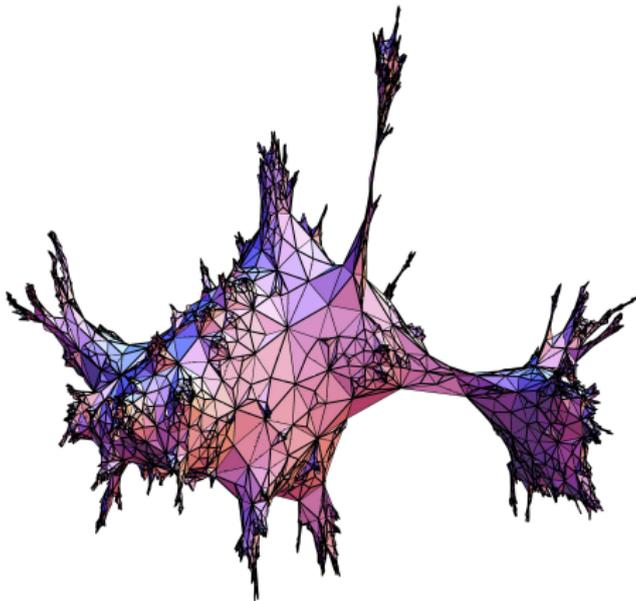


Figure: Une grande **triangulation aléatoire** (simulation par Nicolas Curien)

La carte brownienne

Problème (Schramm, ICM '06) : Soit T_n une triangulation aléatoire de la sphère avec n triangles.

La carte brownienne

Problème (Schramm, ICM '06) : Soit T_n une triangulation aléatoire de la sphère avec n triangles. On voit T_n comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe.

La carte brownienne

Problème (Schramm, ICM '06) : Soit T_n une triangulation aléatoire de la sphère avec n triangles. On voit T_n comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que $n^{-1/4} \cdot T_n$ converge vers un espace métrique compact aléatoire (la carte brownienne)

La carte brownienne

Problème (Schramm, ICM '06) : Soit T_n une triangulation aléatoire de la sphère avec n triangles. On voit T_n comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que $n^{-1/4} \cdot T_n$ converge vers un espace métrique compact aléatoire (**la carte brownienne**), en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

La carte brownienne

Problème (Schramm, ICM '06) : Soit T_n une triangulation aléatoire de la sphère avec n triangles. On voit T_n comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que $n^{-1/4} \cdot T_n$ converge vers un espace métrique compact aléatoire (**la carte brownienne**), en loi pour la topologie de **Gromov–Hausdorff**.

Résolu par **Le Gall** (également pour d'autres familles de cartes dont les quadrangulations) en 2011, et indépendamment par **Miermont** en 2011 pour les quadrangulations.

La carte brownienne

Problème (Schramm, ICM '06) : Soit T_n une triangulation aléatoire de la sphère avec n triangles. On voit T_n comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que $n^{-1/4} \cdot T_n$ converge vers un espace métrique compact aléatoire (**la carte brownienne**), en loi pour la topologie de **Gromov–Hausdorff**.

Résolu par **Le Gall** (également pour d'autres familles de cartes dont les quadrangulations) en 2011, et indépendamment par **Miermont** en 2011 pour les quadrangulations.

Depuis, on a montré la convergence vers la carte brownienne de différents modèles de cartes aléatoires (**Beltran & Le Gall**, **Addario-Berry & Albenque**, **Bettinelli**, **Bettinelli & Jacob** & **Miermont**, **Abraham**, **Bettinelli & Miermont**)

La carte brownienne

Problème (Schramm, ICM '06) : Soit T_n une triangulation aléatoire de la sphère avec n triangles. On voit T_n comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que $n^{-1/4} \cdot T_n$ converge vers un espace métrique compact aléatoire (la **carte brownienne**), en loi pour la topologie de **Gromov–Hausdorff**.

Résolu par **Le Gall** (également pour d'autres familles de cartes dont les quadrangulations) en 2011, et indépendamment par **Miermont** en 2011 pour les quadrangulations.

Depuis, on a montré la convergence vers la carte brownienne de différents modèles de cartes aléatoires (**Beltran & Le Gall**, **Addario-Berry & Albenque**, **Bettinelli**, **Bettinelli & Jacob** & **Miermont**, **Abraham**, **Bettinelli & Miermont**), en utilisant diverses techniques, en particulier des bijections avec des arbres étiquetés (**Cori–Vauquelin–Schaeffer**, **Bouttier–Di Francesco–Guitter**).

↪ Autres motivations :

- liens avec la gravité quantique 2D de Liouville ([David](#), [Duplantier](#), [Garban](#), [Kupianen](#), [Maillard](#), [Miller](#), [Rhodes](#), [Sheffield](#), [Vargas](#), [Zeitouni](#)).
- étude de cartes aléatoires décorées avec des modèles de physique statistique ([Angel](#), [Berestycki](#), [Borot](#), [Bouttier](#), [Guitter](#), [Chen](#), [Curien](#), [Gwynne](#), [K.](#), [Laslier](#), [Mao](#), [Ray](#), [Richier](#), [Sheffield](#), [Sun](#), [Wilson](#)).

Plan

I. TRIANGULATIONS DE BOLTZMANN À BORD

II. ÉPLUCHAGE

III. CYCLES & CROISSANCE-FRAGMENTATION

IV. PRINCIPALES TECHNIQUES

I. TRIANGULATIONS DE BOLTZMANN À BORD



II. ÉPLUCHAGE

III. CYCLES & CROISSANCE-FRAGMENTATION

IV. PRINCIPALES TECHNIQUES

TRIANGULATIONS

A decorative flourish in blue ink, featuring symmetrical, ornate scrollwork and floral motifs centered below the title.

Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près).

Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près).

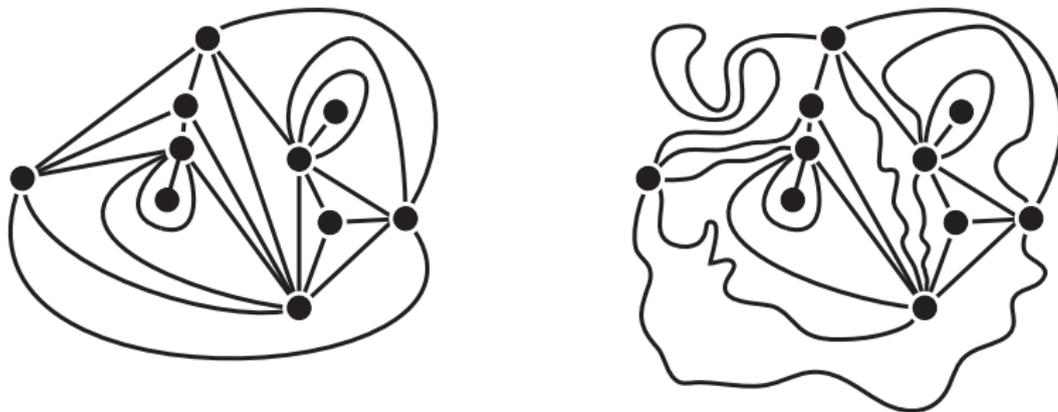


Figure: Deux cartes identiques.

Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près). Une carte est une **triangulation** lorsque toutes ses faces sont des triangles.

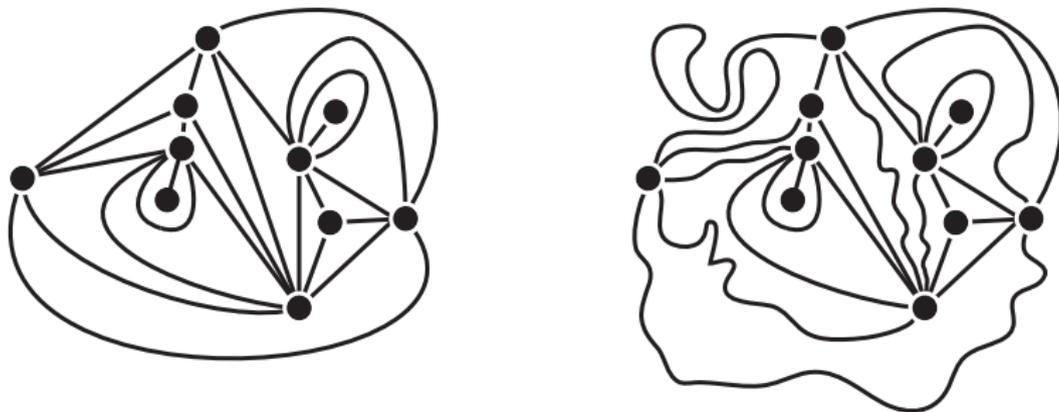


Figure: Deux triangulations identiques.

Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près). Une carte est une **triangulation** lorsque toutes ses faces sont des triangles. Une carte est **enracinée** lorsqu'une arête orientée est distinguée.

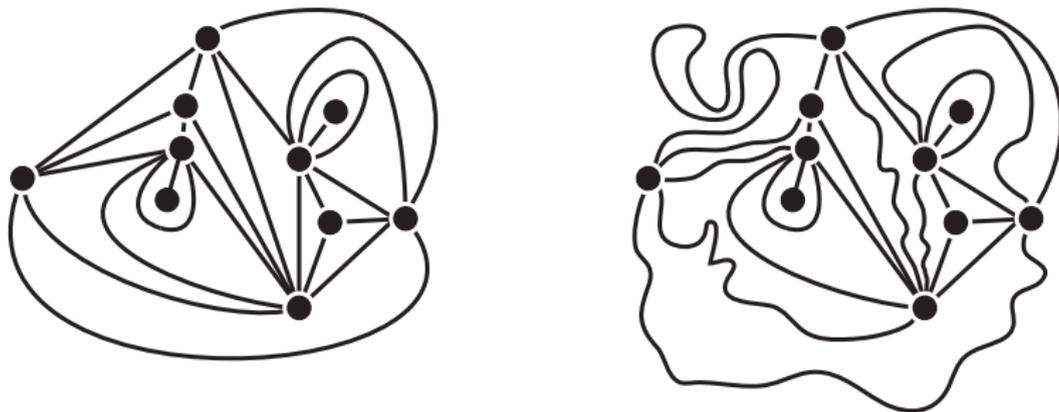


Figure: Deux triangulations identiques.

Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près). Une carte est une **triangulation** lorsque toutes ses faces sont des triangles. Une carte est **enracinée** lorsqu'une arête orientée est distinguée.

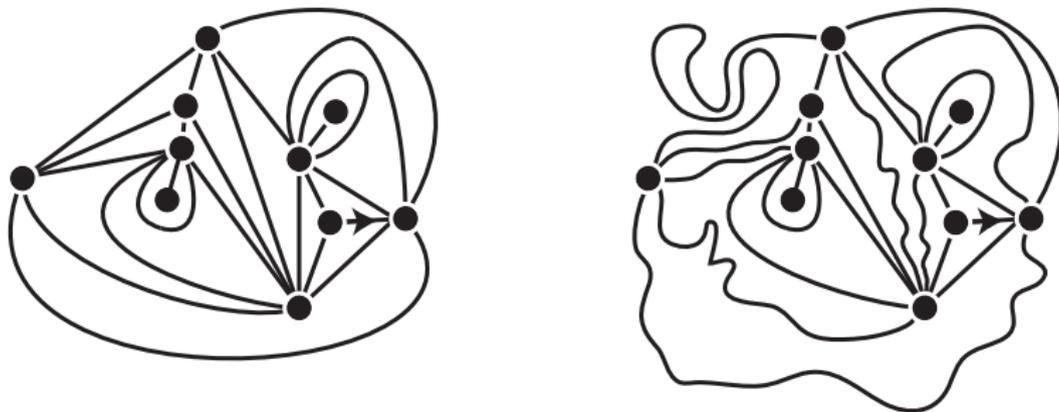


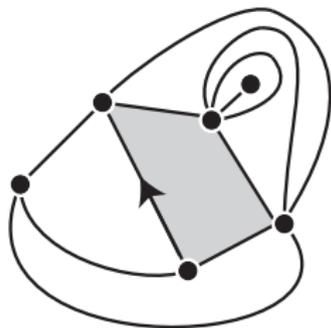
Figure: Deux triangulations enracinées identiques.

TRIANGULATIONS À BORD



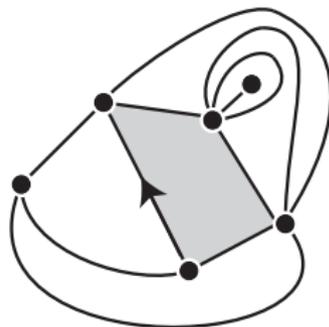
Définitions

Une **triangulation à bord** est une carte où toutes ses faces sont des triangles, sauf éventuellement celle à droite de la racine, appelée **face externe**.



Définitions

Une **triangulation à bord** est une carte où toutes ses faces sont des triangles, sauf éventuellement celle à droite de la racine, appelée **face externe**.



Une **triangulation du p -gone** est une triangulation dont le bord est simple et de longueur p .

Définitions

Une **triangulation à bord** est une carte où toutes ses faces sont des triangles, sauf éventuellement celle à droite de la racine, appelée **face externe**.

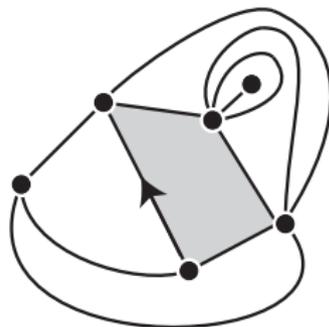


Figure: Une triangulation du 4-gone avec deux sommets internes (càd non adjacents à la face externe).

Une **triangulation du p -gone** est une triangulation dont le bord est simple et de longueur p .

Définitions

On note $\mathcal{T}_{n,p}$ l'ensemble des triangulations du p -gone avec n sommets internes.

Définitions

On note $\mathcal{T}_{n,p}$ l'ensemble des triangulations du p -gone avec n sommets internes.
On a (Krikun)

$$\#\mathcal{T}_{n,p} = 4^{n-1} \frac{p(2p)!(2p+3n-5)!!}{(p!)^2 n! (2p+n-1)!!}$$

Définitions

On note $\mathcal{T}_{n,p}$ l'ensemble des triangulations du p -gone avec n sommets internes.
 On a (Krikun)

$$\#\mathcal{T}_{n,p} = 4^{n-1} \frac{p(2p)!(2p+3n-5)!!}{(p!)^2 n! (2p+n-1)!!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(p) (12\sqrt{3})^n n^{-5/2}.$$

Définitions

On note $\mathcal{T}_{n,p}$ l'ensemble des triangulations du p -gone avec n sommets internes.
On a (Krikun)

$$\#\mathcal{T}_{n,p} = 4^{n-1} \frac{p(2p)!(2p+3n-5)!!}{(p!)^2 n! (2p+n-1)!!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(p) (12\sqrt{3})^n n^{-5/2}.$$

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \#\mathcal{T}_{n,p} z^n$ vaut $(12\sqrt{3})^{-1}$.

Définitions

On note $\mathcal{T}_{n,p}$ l'ensemble des triangulations du p -gone avec n sommets internes.
On a (Krikun)

$$\#\mathcal{T}_{n,p} = 4^{n-1} \frac{p(2p)!(2p+3n-5)!!}{(p!)^2 n!(2p+n-1)!!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(p) (12\sqrt{3})^n n^{-5/2}.$$

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \#\mathcal{T}_{n,p} z^n$ vaut $(12\sqrt{3})^{-1}$.

On pose

$$Z(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12\sqrt{3}} \right)^n \#\mathcal{T}_{n,p} < \infty.$$

Définitions

On note $\mathcal{T}_{n,p}$ l'ensemble des **triangulations du p -gone** avec n sommets internes.
On a (**Krikun**)

$$\#\mathcal{T}_{n,p} = 4^{n-1} \frac{p(2p)!(2p+3n-5)!!}{(p!)^2 n!(2p+n-1)!!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(p) (12\sqrt{3})^n n^{-5/2}.$$

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \#\mathcal{T}_{n,p} z^n$ vaut $(12\sqrt{3})^{-1}$.

On pose

$$Z(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12\sqrt{3}} \right)^n \#\mathcal{T}_{n,p} < \infty.$$

Une **triangulation du p -gone** choisie au hasard avec probabilité

$$(12\sqrt{3})^{-\#(\text{sommets internes})} Z(p)^{-1}$$

est appelée **triangulation de Boltzmann du p -gone**.

CYCLES À HAUTEURS



Le but

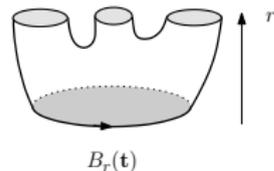
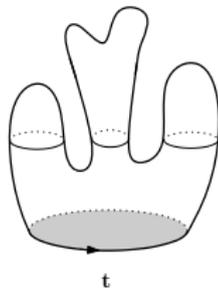
Soit $T^{(p)}$ une triangulation de Boltzmann aléatoire du p -gone

Le but

Soit $T^{(p)}$ une triangulation de Boltzmann aléatoire du p -gone, $B_r(T^{(p)})$ sa boule de rayon r

Le but

Soit $T^{(p)}$ une triangulation de Boltzmann aléatoire du p -gone, $B_r(T^{(p)})$ sa boule de rayon r

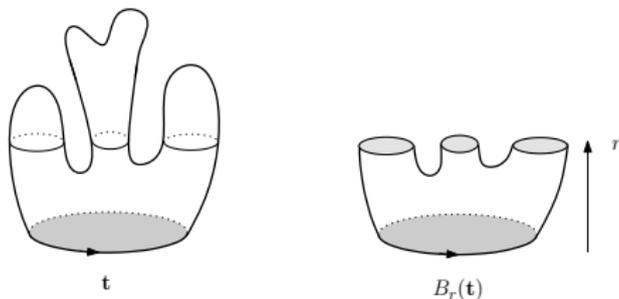


Le but

Soit $T^{(p)}$ une triangulation de Boltzmann aléatoire du p -gone, $B_r(T^{(p)})$ sa boule de rayon r , et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs (ou périmètres) des cycles of $B_r(T^{(p)})$, rangés dans l'ordre décroissant.

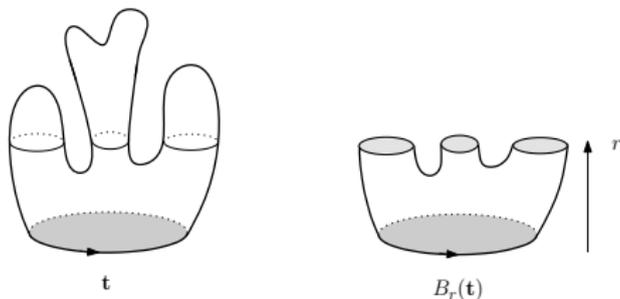


Le but

Soit $T^{(p)}$ une triangulation de Boltzmann aléatoire du p -gone, $B_r(T^{(p)})$ sa boule de rayon r , et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs (ou périmètres) des cycles of $B_r(T^{(p)})$, rangés dans l'ordre décroissant.



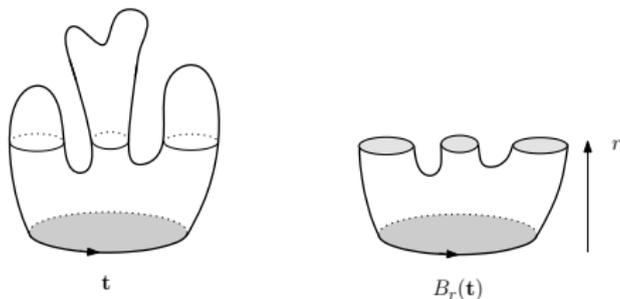
↪ **But** : obtenir un principe d'invariance fonctionnel pour le processus $(\mathbb{L}^{(p)}(r); r \geq 0)$.

Le but

Soit $T^{(p)}$ une triangulation de Boltzmann aléatoire du p -gone, $B_r(T^{(p)})$ sa boule de rayon r , et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs (ou périmètres) des cycles of $B_r(T^{(p)})$, rangés dans l'ordre décroissant.



↪ **But** : obtenir un principe d'invariance fonctionnel pour le processus $(\mathbb{L}^{(p)}(r); r \geq 0)$. Dans cet esprit, une description du “parcours en largeur” de la **carte brownienne** est donnée par **Miller & Sheffield '15**, cf exposé de **Nicolas**.

I. TRIANGULATIONS DE BOLTZMANN À BORD

II. ÉPLUCHAGE



III. CYCLES & CROISSANCE-FRAGMENTATION

IV. PRINCIPALES TECHNIQUES

Géométrie des cartes aléatoires

Plusieurs techniques pour étudier les **cartes aléatoires** :

Géométrie des cartes aléatoires

Plusieurs techniques pour étudier les **cartes aléatoires** :

– **techniques bijectives**,

Géométrie des cartes aléatoires

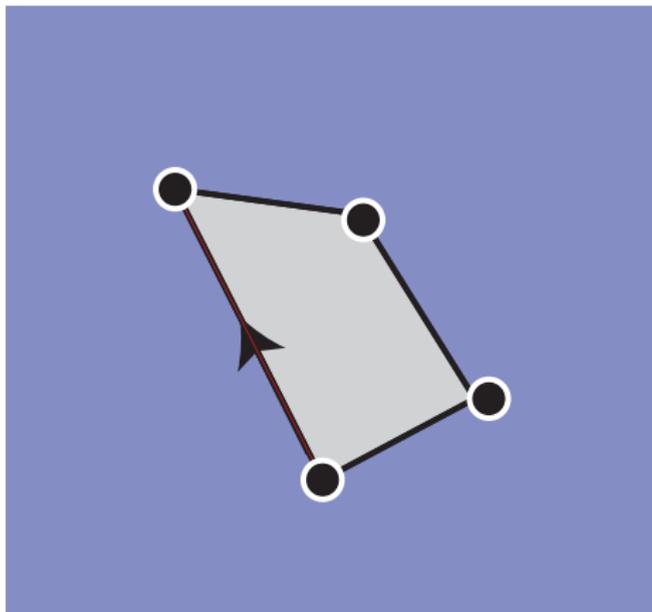
Plusieurs techniques pour étudier les **cartes aléatoires** :

– **techniques bijectives**,

– **l'épluchage**, procédure algorithmique qui explore la carte pas par pas de manière Markovienne ([Watabiki '95](#), [Angel '03](#)).

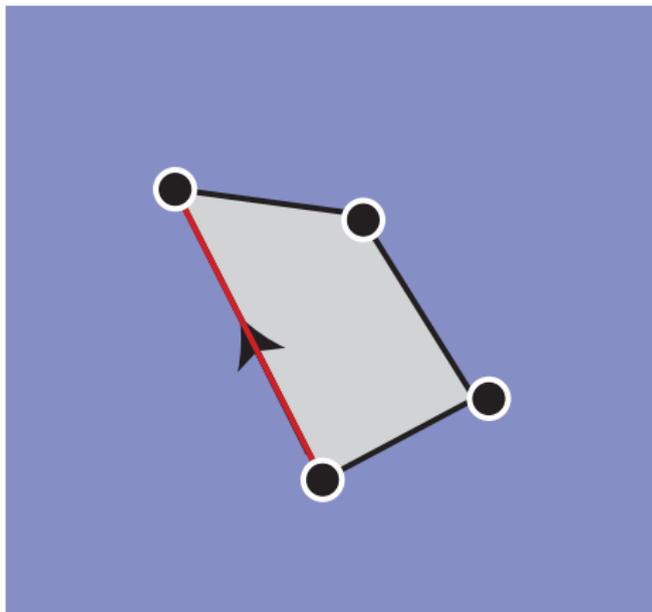
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



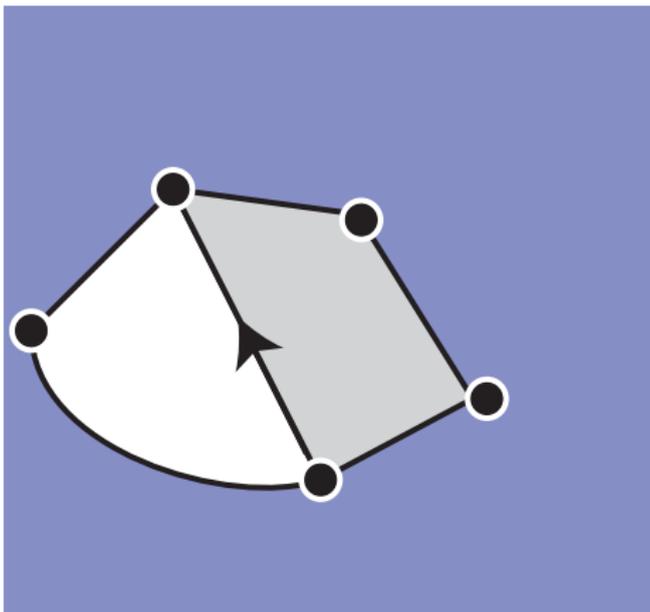
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



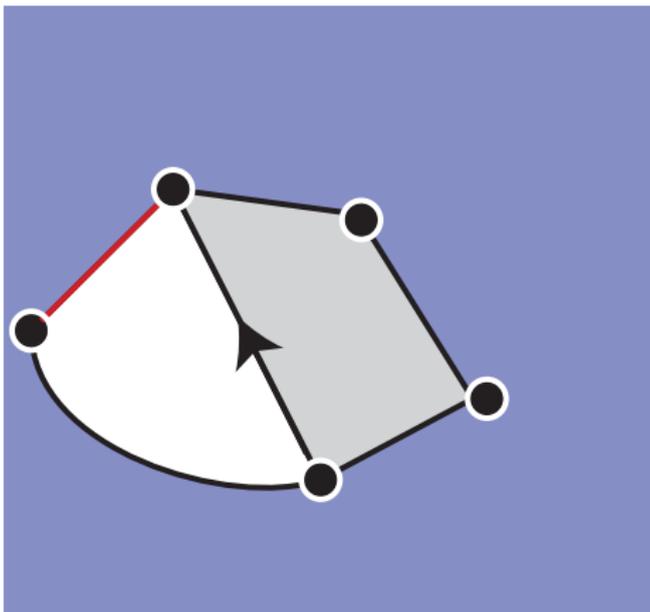
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



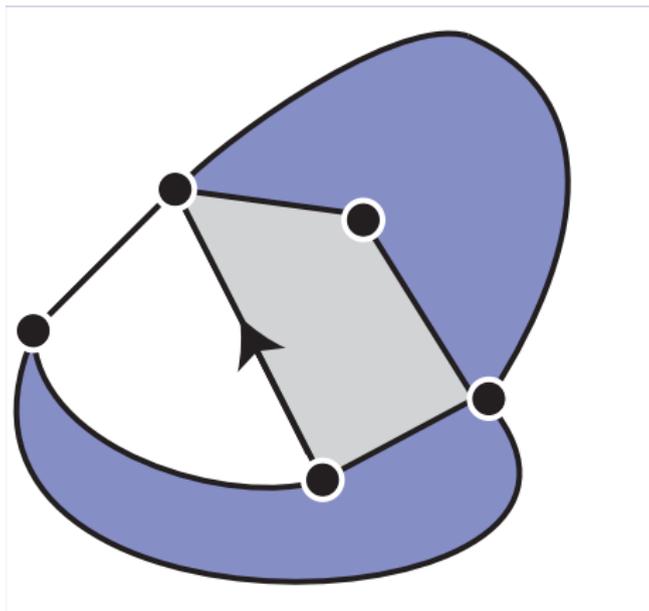
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



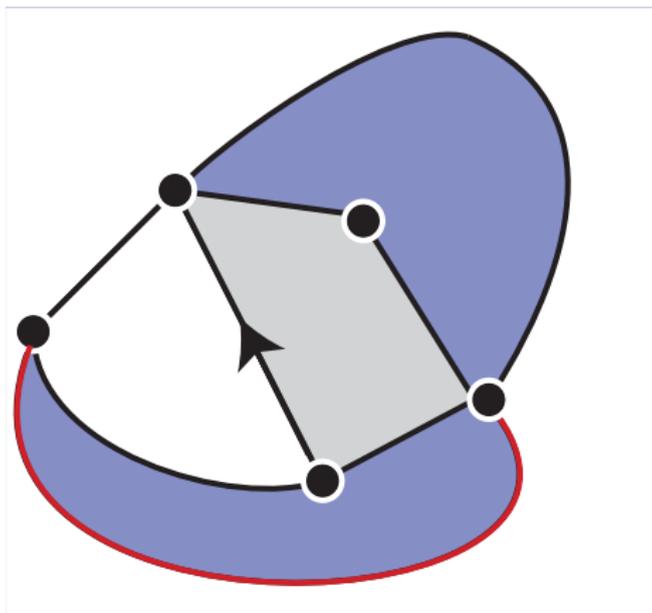
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



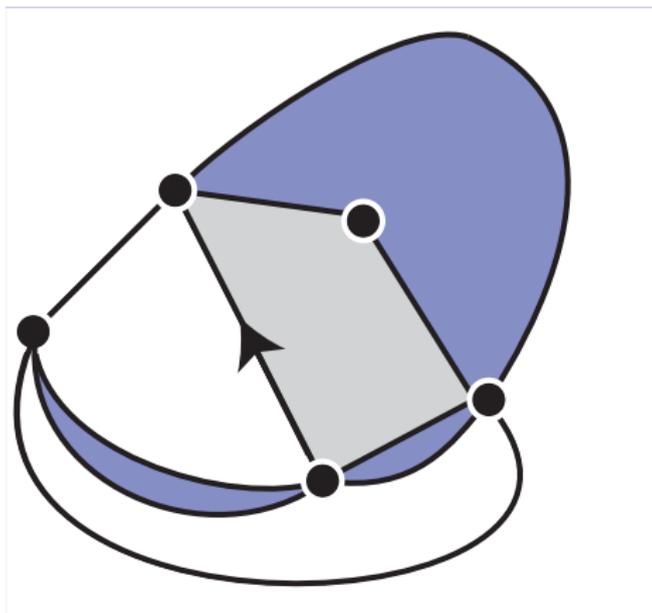
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



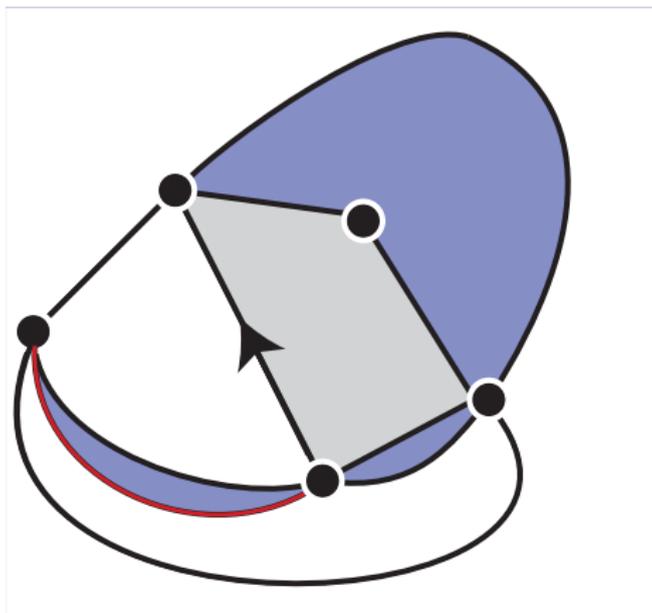
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



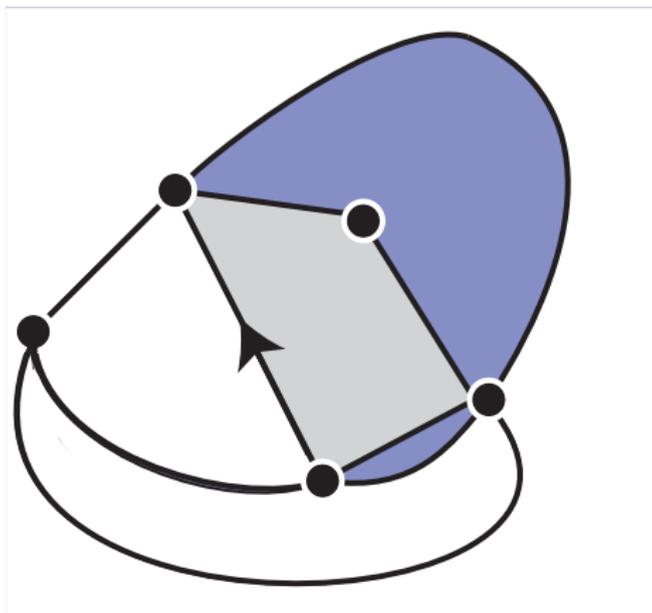
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



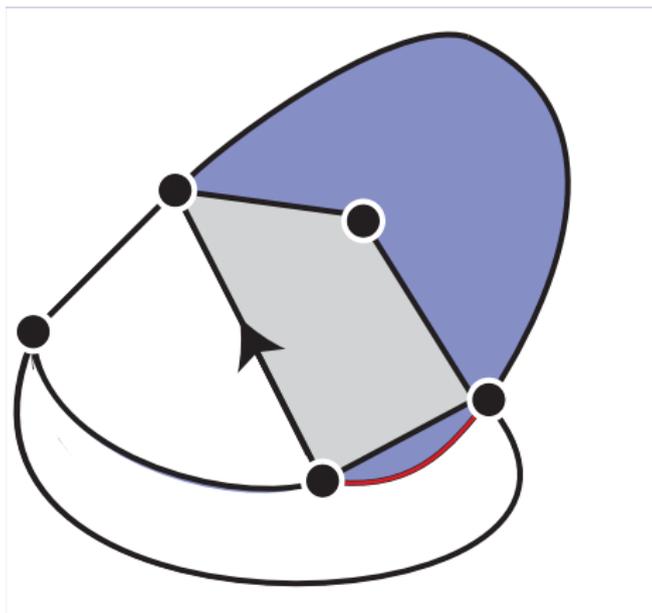
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



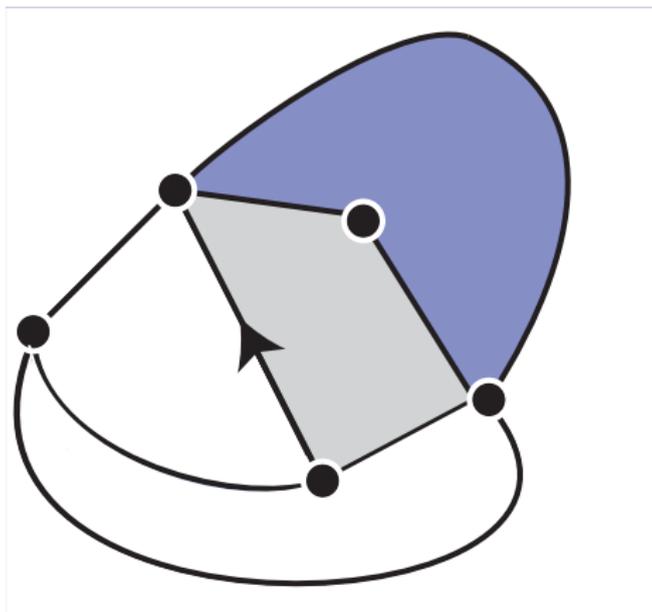
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



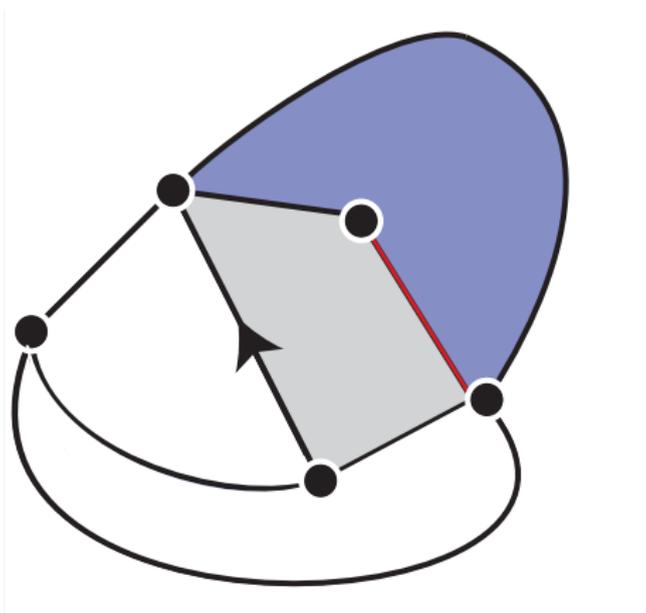
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



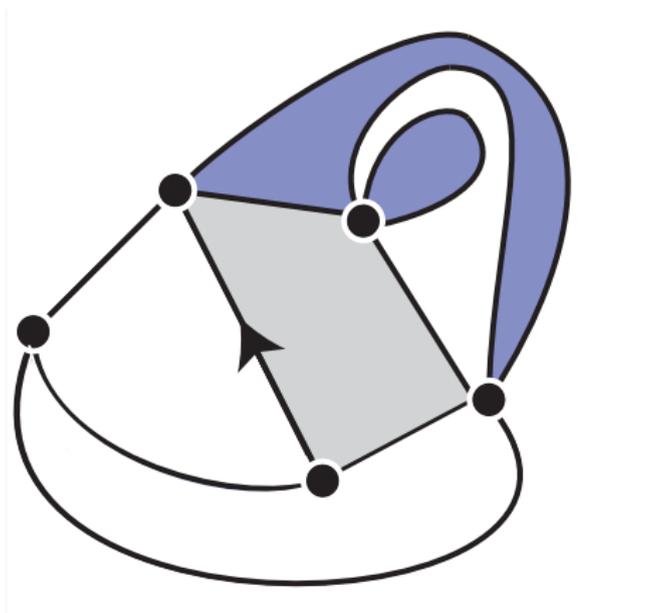
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



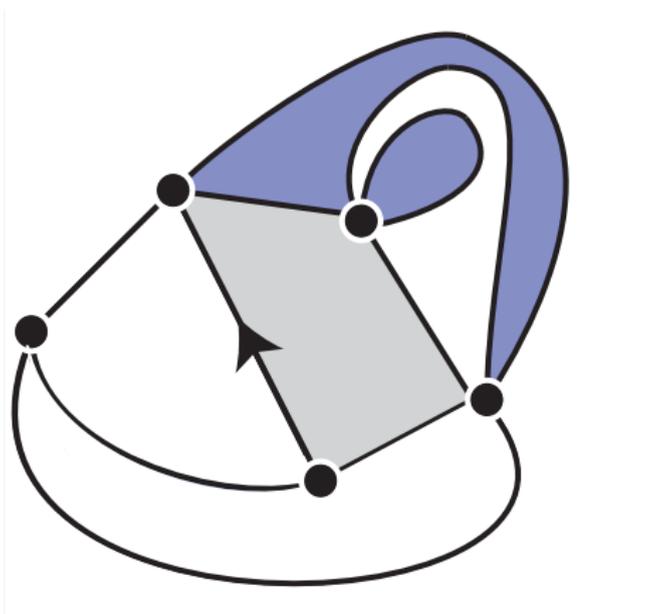
Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



Épluchage branchant

Intuitivement, un **épluchage branchant** d'une **triangulation à bord t** est une manière d'explorer itérativement t en partant du bord et en découvrant à chaque étape un nouveau triangle en *épluchant une arête*, donnée par un algorithme déterministe \mathcal{A} .



Et ainsi de suite...

I. TRIANGULATIONS DE BOLTZMANN À BORD

II. ÉPLUCHAGE

III. CYCLES & CROISSANCE-FRAGMENTATION



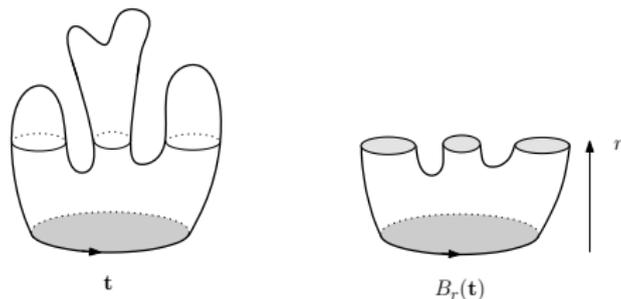
IV. PRINCIPALES TECHNIQUES

Le but

Soit $T^{(p)}$ une triangulation de Boltzmann aléatoire du p -gone, $B_r(T^{(p)})$ sa boule de rayon r , et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

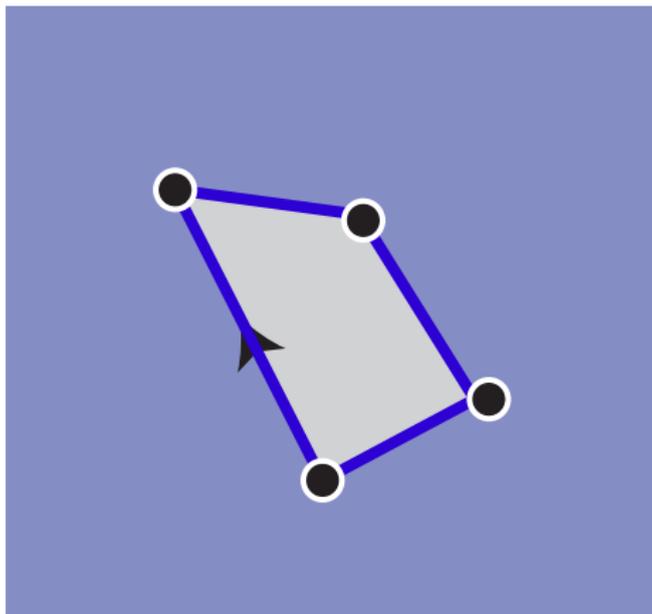
les longueurs (ou périmètres) des cycles of $B_r(T^{(p)})$, rangés dans l'ordre décroissant.



↪ **But** : obtenir un principe d'invariance fonctionnel pour le processus $(\mathbb{L}^{(p)}(r); r \geq 0)$.

Suivre le localement plus grand cycle

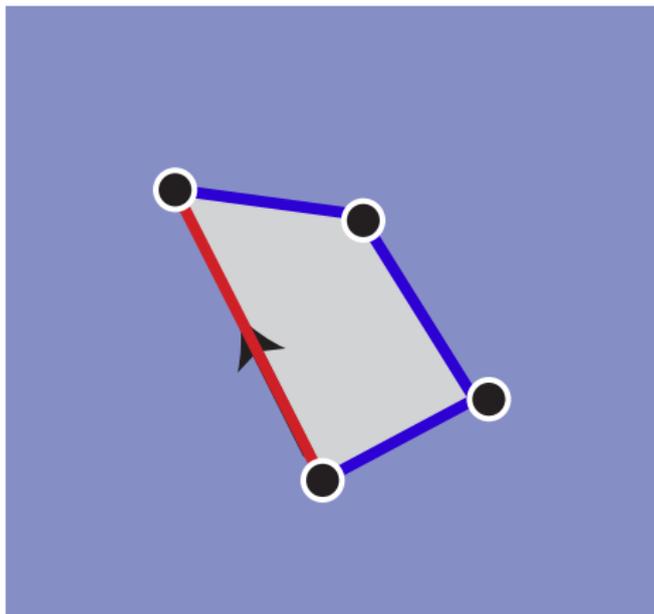
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4$$

Suivre le localement plus grand cycle

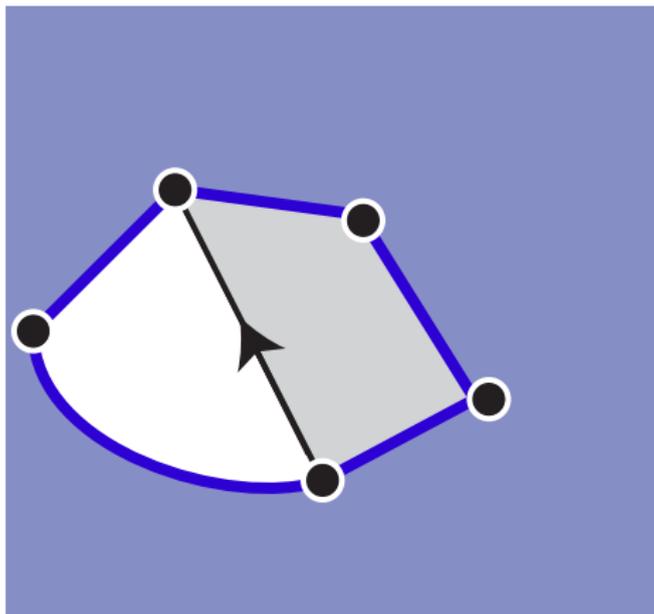
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4$$

Suivre le localement plus grand cycle

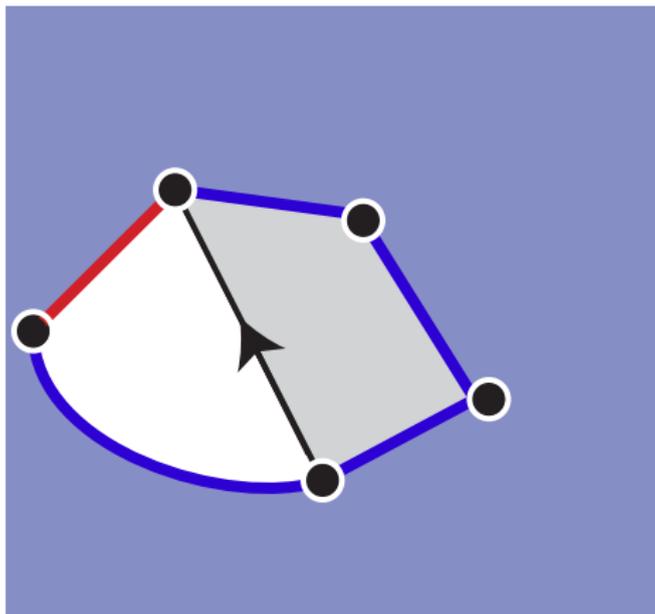
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5$$

Suivre le localement plus grand cycle

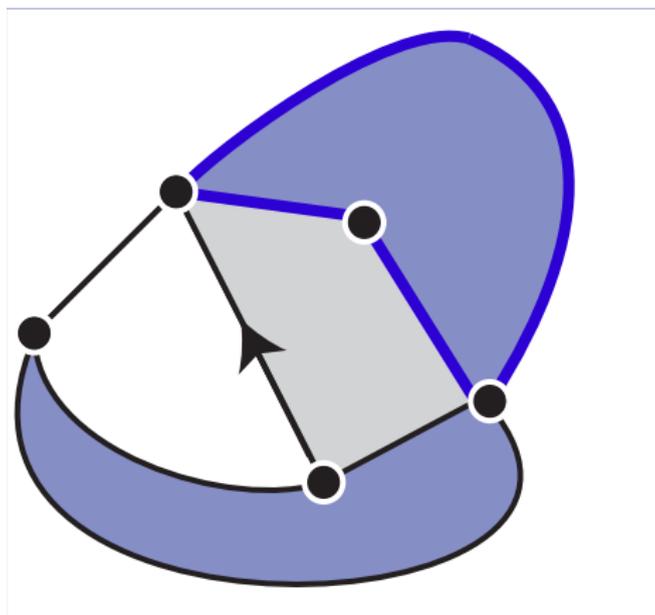
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5$$

Suivre le localement plus grand cycle

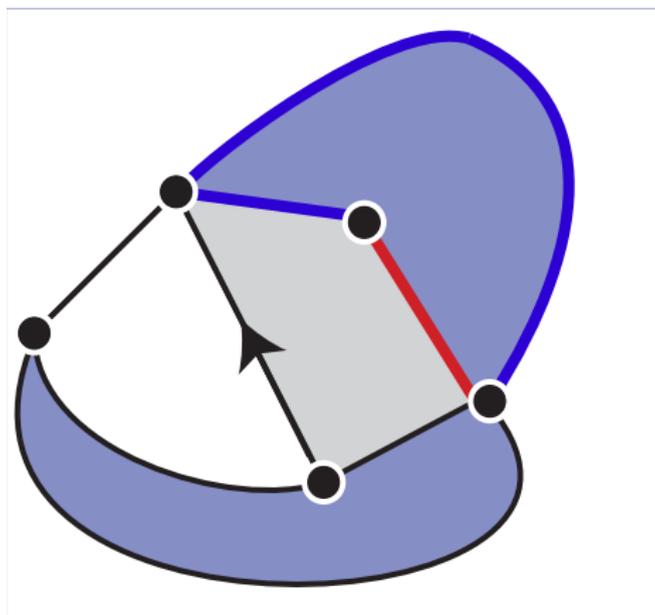
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(2) = 3$$

Suivre le localement plus grand cycle

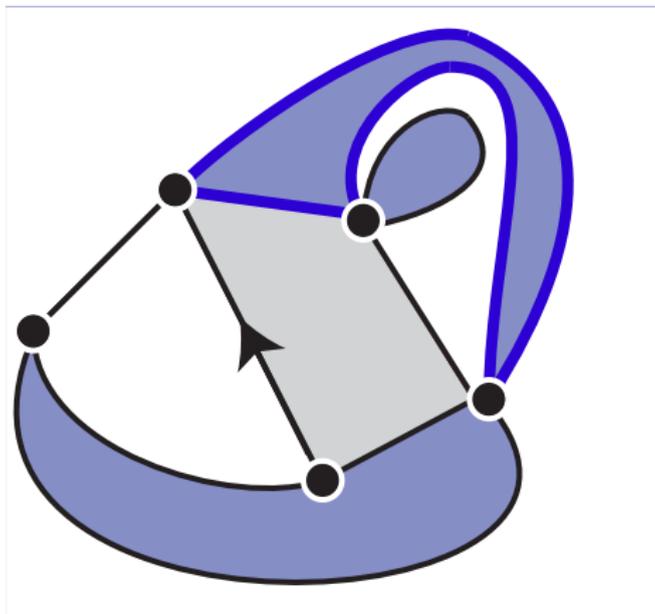
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(2) = 3$$

Suivre le localement plus grand cycle

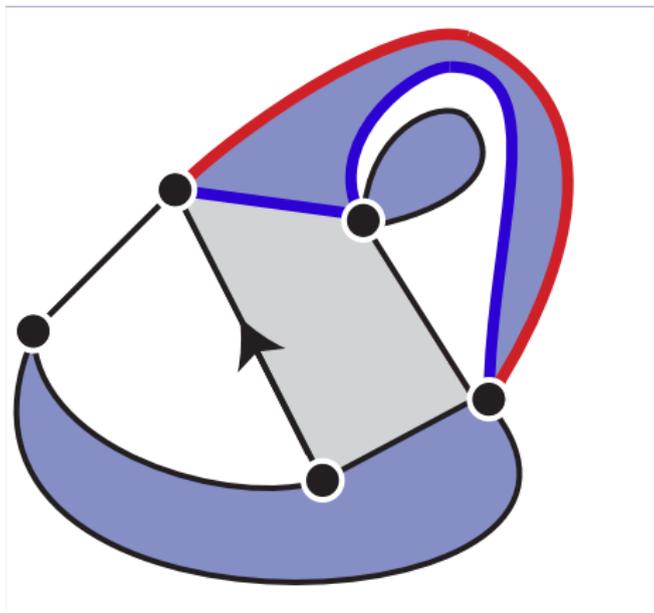
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(2) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(3) = 3$$

Suivre le localement plus grand cycle

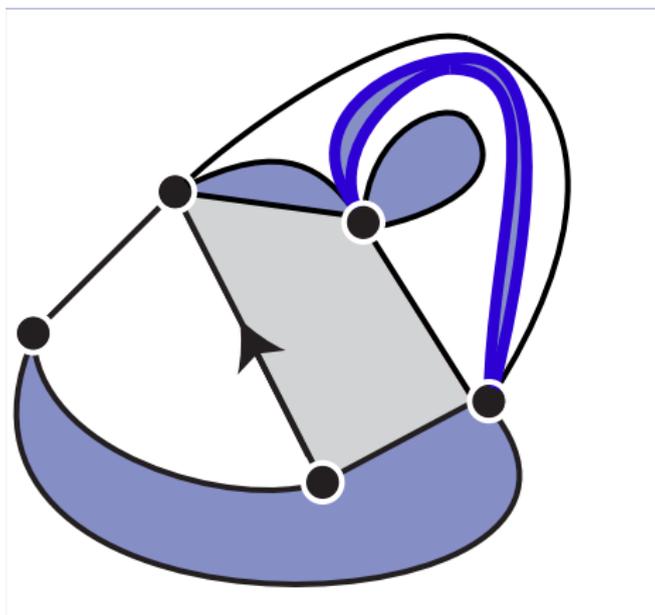
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(2) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(3) = 3$$

Suivre le localement plus grand cycle

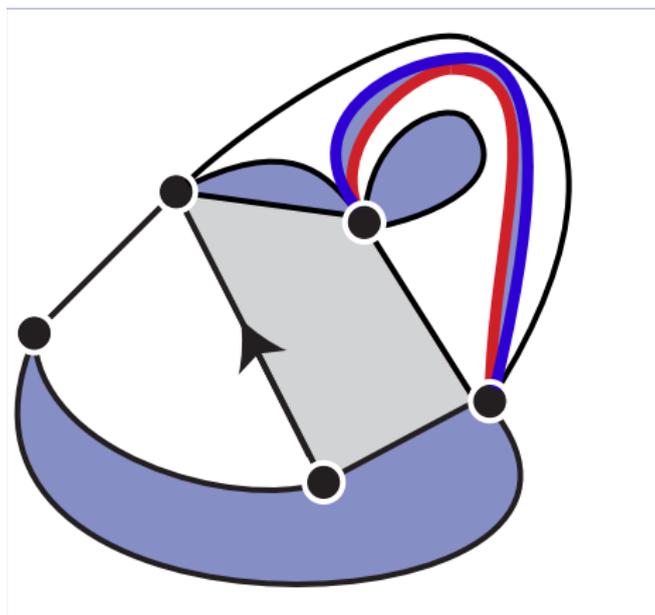
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(2) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(3) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(4) = 2$$

Suivre le localement plus grand cycle

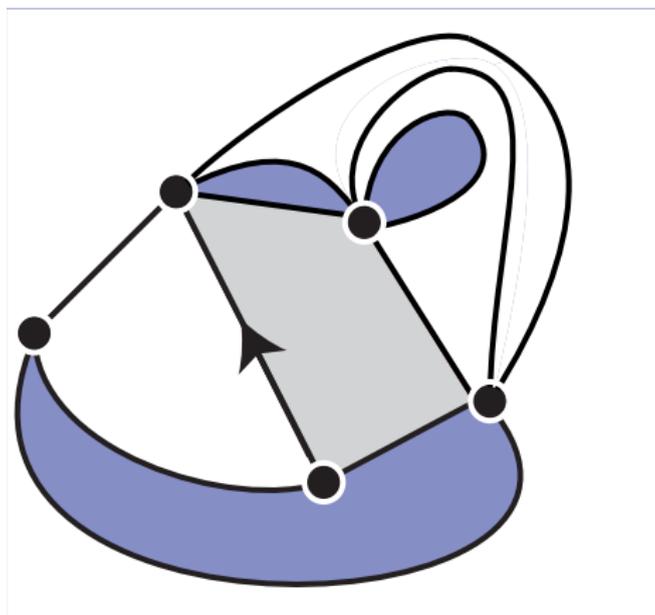
↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(2) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(3) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(4) = 2$$

Suivre le localement plus grand cycle

↗ Idée : à chaque étape d'épluchage, suivre le localement plus grand cycle en notant $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ sa longueur après i pas d'épluchage.



$$\tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(0) = 4, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(1) = 5, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(2) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(3) = 3, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(4) = 2, \tilde{L}_{\text{pas}}^{(4)}(5) = 0.$$

Limite d'échelle du localement plus grand cycle

Rappel : $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ est la longueur du localement plus grand cycle après i pas d'épluchage de $\mathbf{T}^{(p)}$.

Limite d'échelle du localement plus grand cycle

Rappel : $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ est la longueur du localement plus grand cycle après i pas d'épluchage de $T^{(p)}$.

\curvearrowright **Point clé** : $(\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i); i \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur les entiers positifs, démarrée de p , absorbée en 0 et avec une matrice de transition explicite.

Limite d'échelle du localement plus grand cycle

Rappel : $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ est la longueur du localement plus grand cycle après i pas d'épluchage de $T^{(p)}$.

\curvearrowright **Point clé** : $(\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i); i \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur les entiers positifs, démarrée de p , absorbée en 0 et avec une matrice de transition explicite. De plus, les triangulations remplissant les trous non explorés sont des **triangulations de Boltzmann à bord** indépendantes.

Limite d'échelle du localement plus grand cycle

Rappel : $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ est la longueur du localement plus grand cycle après i pas d'épluchage de $T^{(p)}$.

\curvearrowright **Point clé** : $(\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i); i \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur les entiers positifs, démarrée de p , absorbée en 0 et avec une matrice de transition explicite. De plus, les triangulations remplissant les trous non explorés sont des **triangulations de Boltzmann à bord** indépendantes.

Si $L_{\text{haut}}^{(p)}(r)$ est la longueur du localement plus grand cycle à **hauteur** r

Limite d'échelle du localement plus grand cycle

Rappel : $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ est la longueur du localement plus grand cycle après i pas d'épluchage de $T^{(p)}$.

\curvearrowright **Point clé** : $(\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i); i \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur les entiers positifs, démarrée de p , absorbée en 0 et avec une matrice de transition explicite. De plus, les triangulations remplissant les trous non explorés sont des **triangulations de Boltzmann à bord** indépendantes.

Si $L_{\text{haut}}^{(p)}(r)$ est la longueur du localement plus grand cycle à **hauteur** r , en utilisant Bertoin & K. '14 and Curien & Le Gall '14, on en déduit que :

Proposition (Bertoin, Curien & K. '15).

On a

$$\left(\frac{1}{p} L_{\text{haut}}^{(p)}(\lfloor \sqrt{p} \cdot t \rfloor); t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left(X \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot t \right); t \geq 0 \right),$$

où X est un processus càdlàg avec $X(0) = 1$, qui n'a que des sauts négatifs, auto-similaire d'indice $-1/2$ i.e. $t \mapsto c \cdot X(c^{-1/2}t)$ a la même loi que X issu de c

Limite d'échelle du localement plus grand cycle

Rappel : $\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i)$ est la longueur du localement plus grand cycle après i pas d'épluchage de $T^{(p)}$.

\curvearrowright **Point clé** : $(\tilde{L}_{\text{pas}}^{(p)}(i); i \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur les entiers positifs, démarrée de p , absorbée en 0 et avec une matrice de transition explicite. De plus, les triangulations remplissant les trous non explorés sont des **triangulations de Boltzmann à bord** indépendantes.

Si $L_{\text{haut}}^{(p)}(r)$ est la longueur du localement plus grand cycle à **hauteur** r , en utilisant Bertoin & K. '14 and Curien & Le Gall '14, on en déduit que :

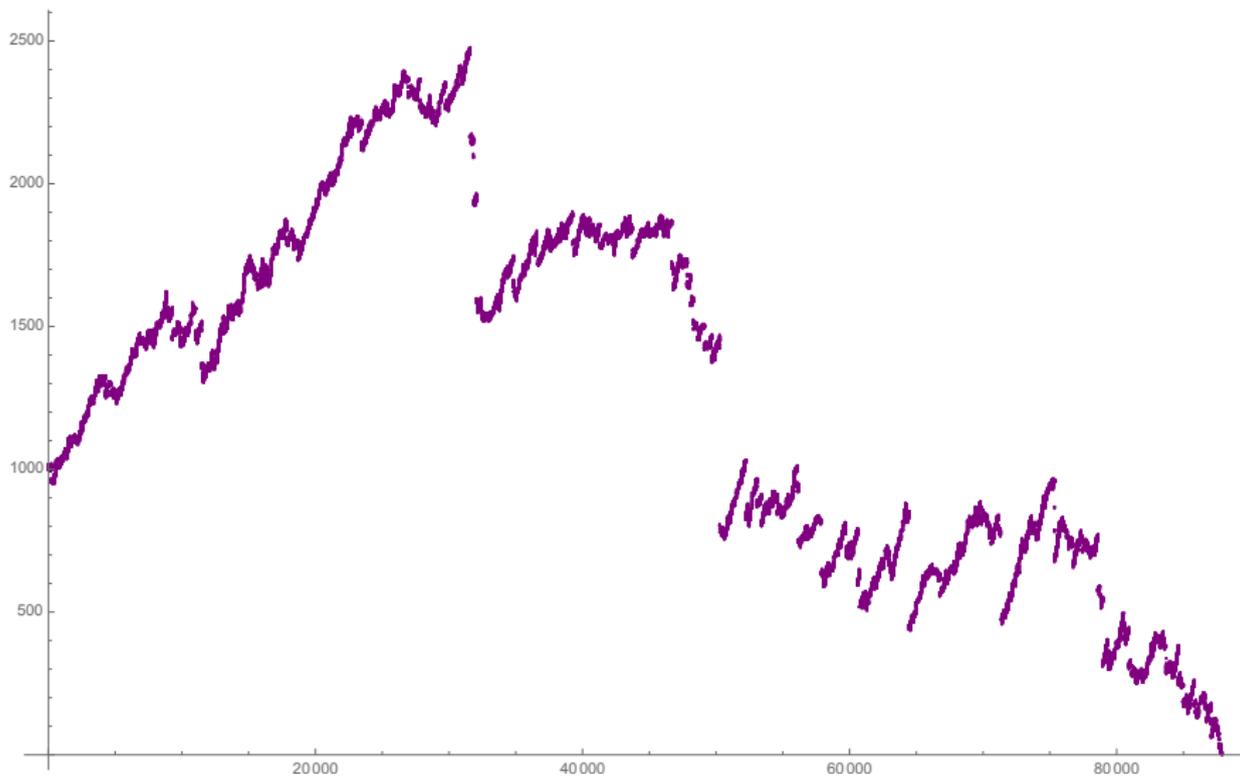
Proposition (Bertoin, Curien & K. '15).

On a

$$\left(\frac{1}{p} L_{\text{haut}}^{(p)}(\lfloor \sqrt{p} \cdot t \rfloor); t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left(X \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot t \right); t \geq 0 \right),$$

où X est un processus càdlàg avec $X(0) = 1$, qui n'a que des sauts négatifs, auto-similaire d'indice $-1/2$ et absorbé en 0.

Une simulation de X



Le processus auto-similaire X

Soit ξ un processus de Lévy spectralement positif dont l'exposant de Laplace est

$$\Psi(q) = -\frac{8}{3}q + \int_{1/2}^1 (x^q - 1 + q(1-x)) (x(1-x))^{-5/2} dx,$$

de sorte que $\mathbb{E}[\exp(q\xi(t))] = \exp(t\Psi(q))$ pour tout $t \geq 0$ et $q \geq 0$ et $\xi(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$.

Le processus auto-similaire X

Soit ξ un processus de Lévy spectralement positif dont l'exposant de Laplace est

$$\Psi(q) = -\frac{8}{3}q + \int_{1/2}^1 (x^q - 1 + q(1-x)) (x(1-x))^{-5/2} dx,$$

de sorte que $\mathbb{E}[\exp(q\xi(t))] = \exp(t\Psi(q))$ pour tout $t \geq 0$ et $q \geq 0$ et $\xi(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$.

Finalement, on pose

$$X(t) = \exp(\xi(\tau(t))), \quad t \geq 0$$

Le processus auto-similaire X

Soit ξ un processus de Lévy spectralement positif dont l'exposant de Laplace est

$$\Psi(q) = -\frac{8}{3}q + \int_{1/2}^1 (x^q - 1 + q(1-x)) (x(1-x))^{-5/2} dx,$$

de sorte que $\mathbb{E}[\exp(q\xi(t))] = \exp(t\Psi(q))$ pour tout $t \geq 0$ et $q \geq 0$ et $\xi(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$.

On pose

$$\tau(t) = \inf \left\{ u \geq 0; \int_0^u e^{\xi(s)/2} ds > t \right\}, \quad t \geq 0$$

Avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, i.e. $\tau(t) = \infty$ dès que $t \geq \int_0^\infty e^{\xi(s)/2} ds$.

Finalement, on pose

$$X(t) = \exp(\xi(\tau(t))), \quad t \geq 0$$

Le processus auto-similaire X

Soit ξ un processus de Lévy spectralement positif dont l'exposant de Laplace est

$$\Psi(q) = -\frac{8}{3}q + \int_{1/2}^1 (x^q - 1 + q(1-x)) (x(1-x))^{-5/2} dx,$$

de sorte que $\mathbb{E}[\exp(q\xi(t))] = \exp(t\Psi(q))$ pour tout $t \geq 0$ et $q \geq 0$ et $\xi(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$.

On pose

$$\tau(t) = \inf \left\{ u \geq 0; \int_0^u e^{\xi(s)/2} ds > t \right\}, \quad t \geq 0$$

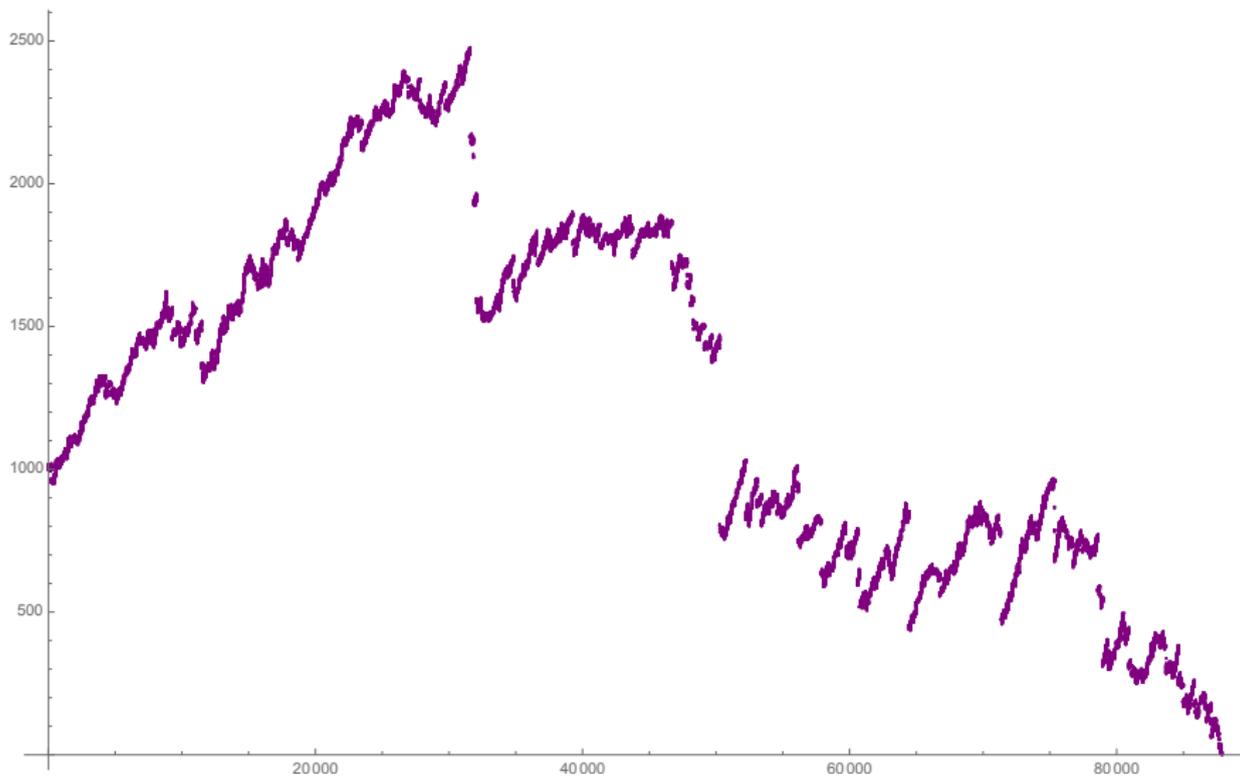
Avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, i.e. $\tau(t) = \infty$ dès que $t \geq \int_0^\infty e^{\xi(s)/2} ds$.

Finalement, on pose

$$X(t) = \exp(\xi(\tau(t))), \quad t \geq 0$$

avec la convention $\exp(\xi(\infty)) = 0$, qui est un processus de Markov auto-similaire d'indice $-1/2$ (transformation de Lamperti).

Une simulation de X



Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires.

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X .

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X . On interprète chaque saut (négatif) de X comme une division de la cellule, c'est-à-dire si $\Delta X(t) = X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère (de taille $X(t)$) et une cellule fille (de taille y).

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X . On interprète chaque saut (négatif) de X comme une division de la cellule, c'est-à-dire si $\Delta X(t) = X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère (de taille $X(t)$) et une cellule fille (de taille y).

 après la division, la taille de la cellule fille évolue suivant une version indépendante de X (issu de y)

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X . On interprète chaque saut (négatif) de X comme une division de la cellule, c'est-à-dire si $\Delta X(t) = X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère (de taille $X(t)$) et une cellule fille (de taille y).

 après la division, la taille de la cellule fille évolue suivant une version indépendante de X (issu de y), indépendamment de toutes les autres évolutions.

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X . On interprète chaque saut (négatif) de X comme une division de la cellule, c'est-à-dire si $\Delta X(t) = X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère (de taille $X(t)$) et une cellule fille (de taille y).

↘ après la division, la taille de la cellule fille évolue suivant une version indépendante de X (issu de y), indépendamment de toutes les autres évolutions.

Et ainsi de suite pour les petites filles, arrière petites filles, ...

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X . On interprète chaque saut (négatif) de X comme une division de la cellule, c'est-à-dire si $\Delta X(t) = X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère (de taille $X(t)$) et une cellule fille (de taille y).

 après la division, la taille de la cellule fille évolue suivant une version indépendante de X (issu de y), indépendamment de toutes les autres évolutions.

Et ainsi de suite pour les petites filles, arrière petites filles, ...

Par Bertoin '15, pour tout $t \geq 0$, la famille des tailles des cellules présentes à l'instant t est de cube sommable

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X . On interprète chaque saut (négatif) de X comme une division de la cellule, c'est-à-dire si $\Delta X(t) = X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère (de taille $X(t)$) et une cellule fille (de taille y).

↘ après la division, la taille de la cellule fille évolue suivant une version indépendante de X (issu de y), indépendamment de toutes les autres évolutions.

Et ainsi de suite pour les petites filles, arrière petites filles, ...

Par Bertoin '15, pour tout $t \geq 0$, la famille des tailles des cellules présentes à l'instant t est de cube sommable, et peut donc être rangée dans un ordre décroissant

Croissance-fragmentation : vision généalogique

On utilise X pour définir un processus auto-similaire de croissance-fragmentation à dislocations binaires. On voit $X(t)$ comme la taille d'une particule ou cellule typique à l'âge t .

– On commence au temps 0 avec une cellule de taille 1, dont la taille évolue suivant X . On interprète chaque saut (négatif) de X comme une division de la cellule, c'est-à-dire si $\Delta X(t) = X(t) - X(t-) = -y < 0$, la cellule se divise au temps t en une cellule mère (de taille $X(t)$) et une cellule fille (de taille y).

↘ après la division, la taille de la cellule fille évolue suivant une version indépendante de X (issu de y), indépendamment de toutes les autres évolutions.

Et ainsi de suite pour les petites filles, arrière petites filles, ...

Par Bertoin '15, pour tout $t \geq 0$, la famille des tailles des cellules présentes à l'instant t est de cube sommable, et peut donc être rangée dans un ordre décroissant Ceci fournit une variable aléatoire à valeurs dans ℓ_3^\downarrow notée

$$\mathbb{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots).$$

Processus de croissance-fragmentation : vision temporelle

On peut voir \mathbb{X} comme une fragmentation compensée auto-similaire, qui décrit l'évolution des tailles de particules qui grossissent et se divisent indépendamment au fur et à mesure que le temps passe :

Processus de croissance-fragmentation : vision temporelle

On peut voir \mathbb{X} comme une fragmentation compensée auto-similaire, qui décrit l'évolution des tailles de particules qui grossissent et se divisent indépendamment au fur et à mesure que le temps passe :

\rightsquigarrow \mathbb{X} satisfait à une propriété de branchement et est auto-similaire d'indice $-1/2$

Processus de croissance-fragmentation : vision temporelle

On peut voir \mathbb{X} comme une fragmentation compensée auto-similaire, qui décrit l'évolution des tailles de particules qui grossissent et se divisent indépendamment au fur et à mesure que le temps passe :

\curvearrowright \mathbb{X} satisfait à une propriété de branchement et est auto-similaire d'indice $-1/2$, c'à d que pour tout $c > 0$, le processus $(c\mathbb{X}(c^{-1/2}t), t \geq 0)$ a la même loi que \mathbb{X} issu de la suite $(c, 0, 0, \dots)$.

Processus de croissance-fragmentation : vision temporelle

On peut voir \mathbb{X} comme une fragmentation compensée auto-similaire, qui décrit l'évolution des tailles de particules qui grossissent et se divisent indépendamment au fur et à mesure que le temps passe :

↪ \mathbb{X} satisfait à une propriété de branchement et est auto-similaire d'indice $-1/2$, c'est-à-dire que pour tout $c > 0$, le processus $(c\mathbb{X}(c^{-1/2}t), t \geq 0)$ a la même loi que \mathbb{X} issu de la suite $(c, 0, 0, \dots)$.

↪ Les divisions de \mathbb{X} sont binaires, i.e. elles correspondent à remplacer une taille m par deux masses plus petites m_1 et m_2 avec $m_1 + m_2 = m$.

Processus de croissance-fragmentation : vision temporelle

On peut voir \mathbb{X} comme une fragmentation compensée auto-similaire, qui décrit l'évolution des tailles de particules qui grossissent et se divisent indépendamment au fur et à mesure que le temps passe :

↪ \mathbb{X} satisfait à une propriété de branchement et est auto-similaire d'indice $-1/2$, c'est-à-dire que pour tout $c > 0$, le processus $(c\mathbb{X}(c^{-1/2}t), t \geq 0)$ a la même loi que \mathbb{X} issu de la suite $(c, 0, 0, \dots)$.

↪ Les divisions de \mathbb{X} sont binaires, i.e. elles correspondent à remplacer une taille m par deux masses plus petites m_1 et m_2 avec $m_1 + m_2 = m$. Informellement, dans \mathbb{X} , chaque taille $m > 0$ se divise en deux masses plus petites $(xm, (1-x)m)$ à un taux $m^{-1/2}\nu(dx)$, avec

$$\nu(dx) = (x(1-x))^{-5/2}dx, \quad x \in (0, 1)$$

Processus de croissance-fragmentation : vision temporelle

On peut voir \mathbb{X} comme une fragmentation compensée auto-similaire, qui décrit l'évolution des tailles de particules qui grossissent et se divisent indépendamment au fur et à mesure que le temps passe :

↪ \mathbb{X} satisfait à une propriété de branchement et est auto-similaire d'indice $-1/2$, c'ad que pour tout $c > 0$, le processus $(c\mathbb{X}(c^{-1/2}t), t \geq 0)$ a la même loi que \mathbb{X} issu de la suite $(c, 0, 0, \dots)$.

↪ Les divisions de \mathbb{X} sont binaires, i.e. elles correspondent à remplacer une taille m par deux masses plus petites m_1 et m_2 avec $m_1 + m_2 = m$. Informellement, dans \mathbb{X} , chaque taille $m > 0$ se divise en deux masses plus petites $(xm, (1-x)m)$ à un taux $m^{-1/2}\nu(dx)$, avec

$$\nu(dx) = (x(1-x))^{-5/2}dx, \quad x \in (0, 1)$$

↪ On a $\int^1 (1-x)^2 \nu(dx) < \infty$, mais $\int^1 (1-x) \nu(dx) = \infty$ ce qui explique la nécessité de compenser les dislocations.

Cycles et croissance-fragmentation

Rappel : $\mathbb{L}^{(p)}(\mathbf{r}) = (L_1^{(p)}(\mathbf{r}), L_2^{(p)}(\mathbf{r}), \dots)$ sont les longueurs des cycles de $B_{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^{(p)})$ rangées en ordre décroissant.

Cycles et croissance-fragmentation

Rappel : $\mathbb{L}^{(p)}(r) = (L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots)$ sont les longueurs des cycles de $B_r(\mathbb{T}^{(p)})$ rangées en ordre décroissant.

Théorème (Bertoin, Curien, K. '15).

On a

$$\left(\frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(r\sqrt{p}); r \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left(\mathbb{X} \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot r \right); r \geq 0 \right),$$

Cycles et croissance-fragmentation

Rappel : $\mathbb{L}^{(p)}(r) = \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right)$ sont les longueurs des cycles de $B_r(\mathbb{T}^{(p)})$ rangées en ordre décroissant.

Théorème (Bertoin, Curien, K. '15).

On a

$$\left(\frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(r\sqrt{p}); r \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left(\mathbb{X} \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot r \right); r \geq 0 \right),$$

où $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$ est un processus de croissance-fragmentation auto-similaire d'indice $-1/2$ associé à ξ .

Cycles et croissance-fragmentation

Rappel : $\mathbb{L}^{(p)}(r) = \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right)$ sont les longueurs des cycles de $B_r(\mathbb{T}^{(p)})$ rangées en ordre décroissant.

Théorème (Bertoin, Curien, K. '15).

On a

$$\left(\frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(r\sqrt{p}); r \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left(\mathbb{X} \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot r \right); r \geq 0 \right),$$

où $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$ est un processus de croissance-fragmentation auto-similaire d'indice $-1/2$ associé à ξ . La convergence a lieu dans l'espace des processus càdlàg à valeurs dans ℓ_3^\downarrow muni de la topologie de Skorokhod.

Cycles et croissance-fragmentation

Rappel : $\mathbb{L}^{(p)}(r) = \left(L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right)$ sont les longueurs des cycles de $B_r(\mathbb{T}^{(p)})$ rangées en ordre décroissant.

Théorème (Bertoin, Curien, K. '15).

On a

$$\left(\frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(r\sqrt{p}); r \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left(\mathbb{X} \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot r \right); r \geq 0 \right),$$

où $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$ est un processus de croissance-fragmentation auto-similaire d'indice $-1/2$ associé à ξ . La convergence a lieu dans l'espace des processus càdlàg à valeurs dans ℓ_3^\downarrow muni de la topologie de Skorokhod.

On rappelle que

$$\Psi(q) = -\frac{8}{3}q + \int_{1/2}^1 (x^q - 1 + q(1-x)) (x(1-x))^{-5/2} dx.$$

Cycles et croissance-fragmentation

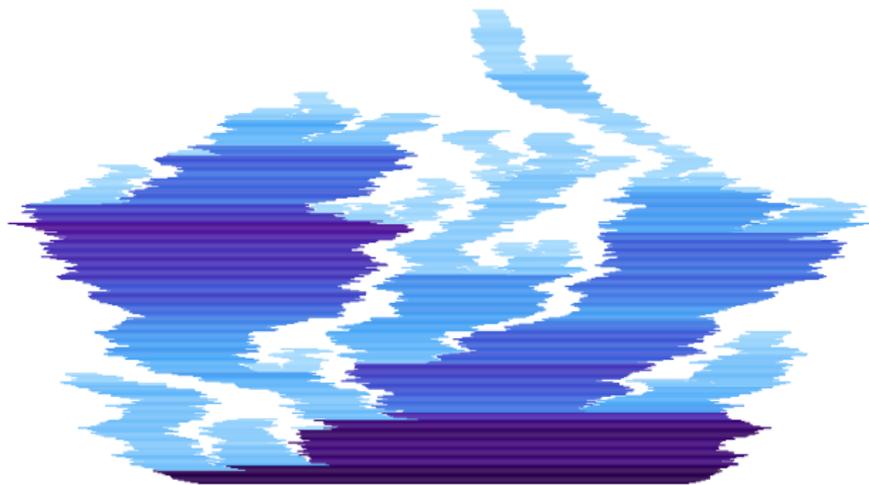


Figure: Une représentation artistique des longueurs des cycles d'une triangulation de Boltzmann à grand bord, coupée à toutes les hauteurs : les segments horizontaux correspondent aux longueurs des cycles à hauteur r . Les cycles les plus longs sont les plus foncés.

I. TRIANGULATIONS DE BOLTZMANN À BORD

II. ÉPLUCHAGE

III. CYCLES & CROISSANCE-FRAGMENTATION

IV. PRINCIPALES TECHNIQUES



Idée 1 : Cutoff

Lors d'un épluchage branchant de $T^{(p)}$, on gèle les cycles dès qu'ils ont une longueur $< \varepsilon p$.

Idée 1 : Cutoff

Lors d'un épluchage branchant de $T^{(p)}$, on gèle les cycles dès qu'ils ont une longueur $< \varepsilon p$.

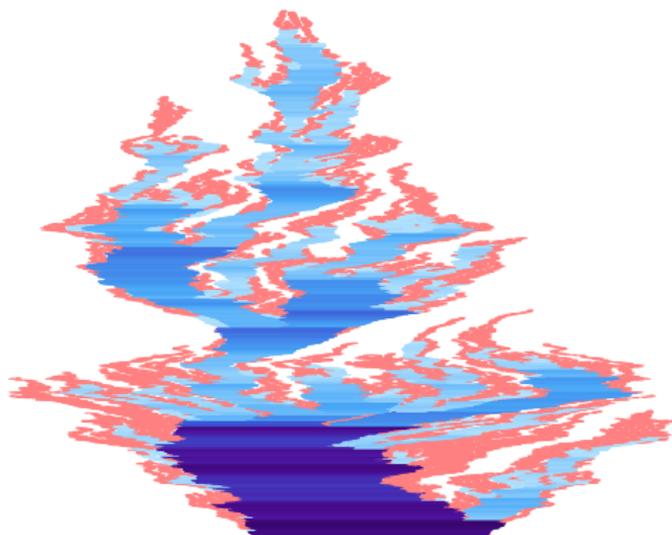


Figure: Illustration du cutoff : les cycles rouges ne sont pas explorés.

Idée 1 : Cutoff

Lors d'un épluchage branchant de $T^{(p)}$, on gèle les cycles dès qu'ils ont une longueur $< \varepsilon p$.

Lemme.

On note $C_1^{< \varepsilon p}, C_2^{< \varepsilon p}, \dots$ les cycles gelés. Alors

$$\sup_{p \geq 1} p^{-3} \mathbb{E}^{(p)} \left[\sum_{i \geq 1} |C_i^{< \varepsilon p}|^3 \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

où $\mathbb{E}^{(p)}$ désigne l'espérance par rapport à la loi de $T^{(p)}$.

Idée 2 : Martingale

On note \mathcal{H}_n la triangulation à bord (avec trous) obtenue après n pas d'épluchage

Idée 2 : Martingale

On note \mathcal{H}_n la triangulation à bord (avec trous) obtenue après n pas d'épluchage

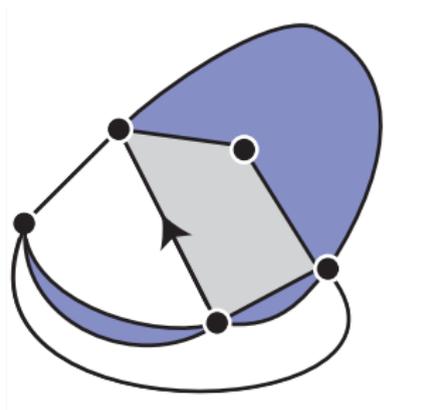


Figure: Cette triangulation à trous du 4-gone a 3 trous. Les périmètres de ses cycles sont 3, 2 et 2. Elle a un sommet interne.

Idée 2 : Martingale

On note \mathcal{H}_n la triangulation à bord (avec trous) obtenue après n pas d'épluchage et $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$ la loi de l'UIPT du p -gone.

Idée 2 : Martingale

On note \mathcal{H}_n la triangulation à bord (avec trous) obtenue après n pas d'épluchage et $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$ la loi de l'UIPT du p -gone.

Proposition.

Soit \mathbf{h} une triangulation du p -gone avec k trous. On note $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ les périmètres des cycles de \mathbf{h} et N le nombre de ses sommets internes. Alors

$$\mathbb{P}^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) =$$

et

$$\mathbb{P}_\infty^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) =$$

Idée 2 : Martingale

On note \mathcal{H}_n la triangulation à bord (avec trous) obtenue après n pas d'épluchage et $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$ la loi de l'UIPT du p -gone.

Proposition.

Soit \mathbf{h} une triangulation du p -gone avec k trous. On note $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ les périmètres des cycles de \mathbf{h} et N le nombre de ses sommets internes. Alors

$$\mathbb{P}^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) = \frac{(12\sqrt{3})^{-N}}{Z(p)} \prod_{i=1}^k Z(\ell_i)$$

et

$$\mathbb{P}_\infty^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) =$$

Idée 2 : Martingale

On note \mathcal{H}_n la triangulation à bord (avec trous) obtenue après n pas d'épluchage et $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$ la loi de l'UIPT du p -gone.

Proposition.

Soit \mathbf{h} une triangulation du p -gone avec k trous. On note $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ les périmètres des cycles de \mathbf{h} et N le nombre de ses sommets internes. Alors

$$\mathbb{P}^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) = \frac{(12\sqrt{3})^{-N}}{Z(p)} \prod_{i=1}^k Z(\ell_i)$$

et

$$\mathbb{P}_\infty^{(p)}(\mathcal{H}_n = \mathbf{h}) = \frac{(12\sqrt{3})^{-N}}{C(p)} \left(\prod_{i=1}^k Z(\ell_i) \right) \left(\sum_{j=1}^k \frac{C(\ell_j)}{Z(\ell_j)} \right).$$

Idée 2 : Martingale

↪ Conséquence. On pose

$$f(1) = \frac{C(1)}{Z(1)} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{3\sqrt{\pi}} \text{ et } f(p) = \frac{C(p)}{Z(p)} = \frac{\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}} \cdot p(2p - 1)(2p - 3), p \geq 2.$$

Idée 2 : Martingale

↪ Conséquence. On pose

$$f(1) = \frac{C(1)}{Z(1)} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{3\sqrt{\pi}} \text{ et } f(p) = \frac{C(p)}{Z(p)} = \frac{\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}} \cdot p(2p - 1)(2p - 3), p \geq 2.$$

Proposition.

Sous $\mathbb{P}^{(p)}$, le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ défini par

$$M_n = \sum_{i \geq 1} f(\ell_i(n)), \quad n \geq 0$$

est une martingale positive avec $M_0 = p$, où $(\ell_i(n))_{i \geq 1}$ sont les longueurs des trous de la **triangulation du p -gone** après n pas d'épluchage.

Idée 2 : Martingale

↪ Conséquence. On pose

$$f(1) = \frac{C(1)}{Z(1)} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{3\sqrt{\pi}} \text{ et } f(p) = \frac{C(p)}{Z(p)} = \frac{\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}} \cdot p(2p - 1)(2p - 3), p \geq 2.$$

Proposition.

Sous $\mathbb{P}^{(p)}$, le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ défini par

$$M_n = \sum_{i \geq 1} f(\ell_i(n)), \quad n \geq 0$$

est une martingale positive avec $M_0 = p$, où $(\ell_i(n))_{i \geq 1}$ sont les longueurs des trous de la **triangulation du p-gone** après n pas d'épluchage.

Cette martingale peut être vue comme la dérivée de Radon-Nikodym d'une **triangulation de Boltzmann du p-gone** par rapport à **l'UIPT du p-gone** après n pas d'épluchage (observé par **Curien & Le Gall**).

Cette martingale permet de montrer que la **triangulation à trous** obtenue par épluchage branchant de $T^{(p)}$ en gelant les cycles dès qu'ils ont une longueur $< \varepsilon p$ est une bonne approximation (au sens de la norme ℓ^3) de $T^{(p)}$ lorsque $p \rightarrow \infty$.

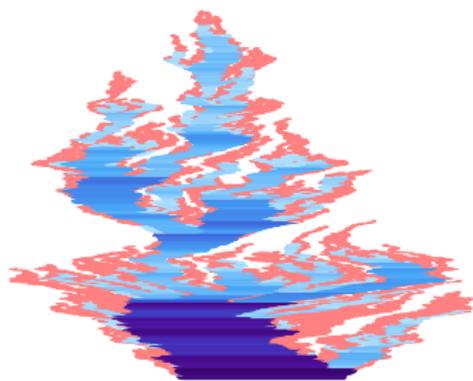


Figure: Les cycles rouges ont une petite contribution.

Cette martingale permet de montrer que la **triangulation à trous** obtenue par épluchage branchant de $T^{(p)}$ en gelant les cycles dès qu'ils ont une longueur $< \varepsilon p$ est une bonne approximation (au sens de la norme ℓ^3) de $T^{(p)}$ lorsque $p \rightarrow \infty$.

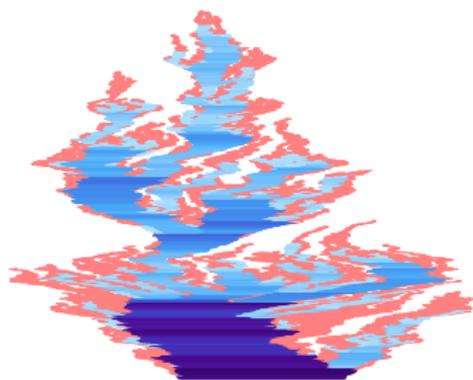


Figure: Les cycles rouges ont une petite contribution.

On montre que cette triangulation à trous est aussi une bonne approximation de $T^{(p)}$ au sens métrique.