

La dynamique de Miquel pour les agencements de cercles

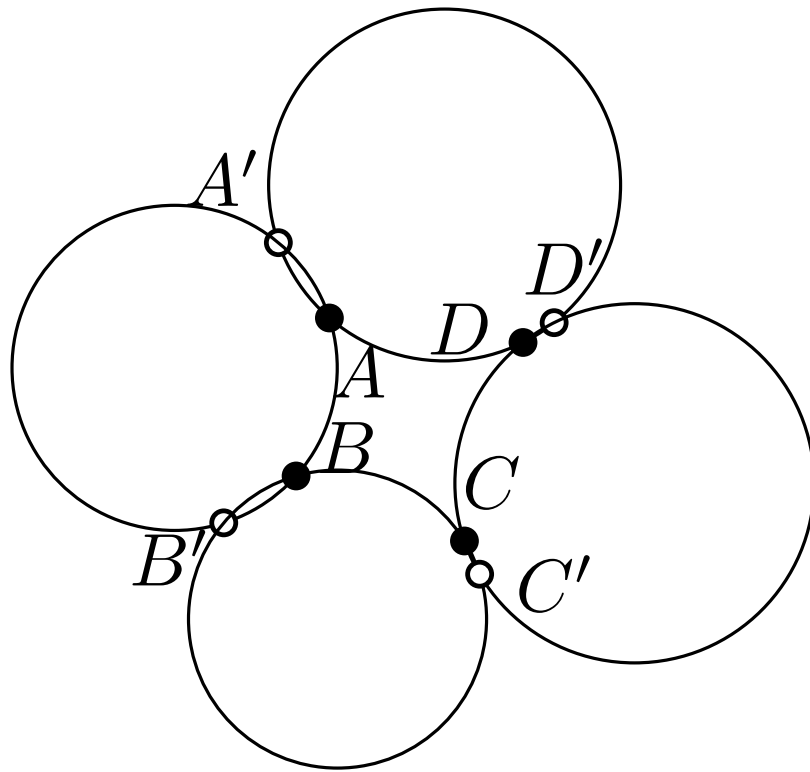
Sanjay Ramassamy
ENS Lyon

Travaux en partie en collaboration avec
Alexey Glutsyuk (ENS Lyon)

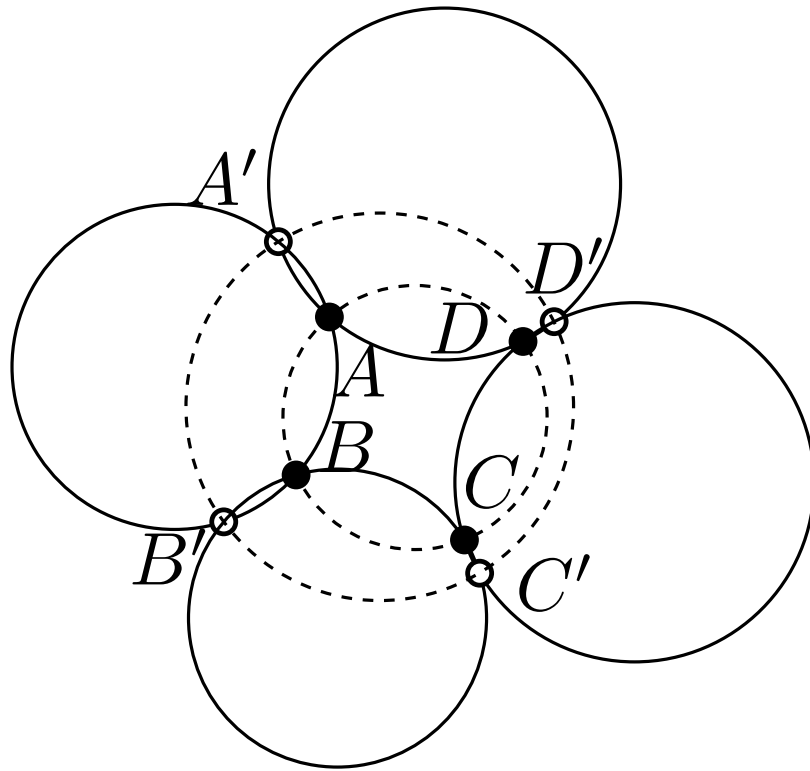
Journée cartes
École Polytechnique, 27 novembre 2017

- Agencements de cercles : utiles pour uniformiser des graphes sur des surfaces, très étudiés en géométrie différentielle discrète.
- Plusieurs systèmes intégrables discrets découverts récemment (pentagramme, dimères, ...).
- Tentative de construction d'un système intégrable discret en utilisant le théorème des six cercles de Miquel.

Théorème de Miquel

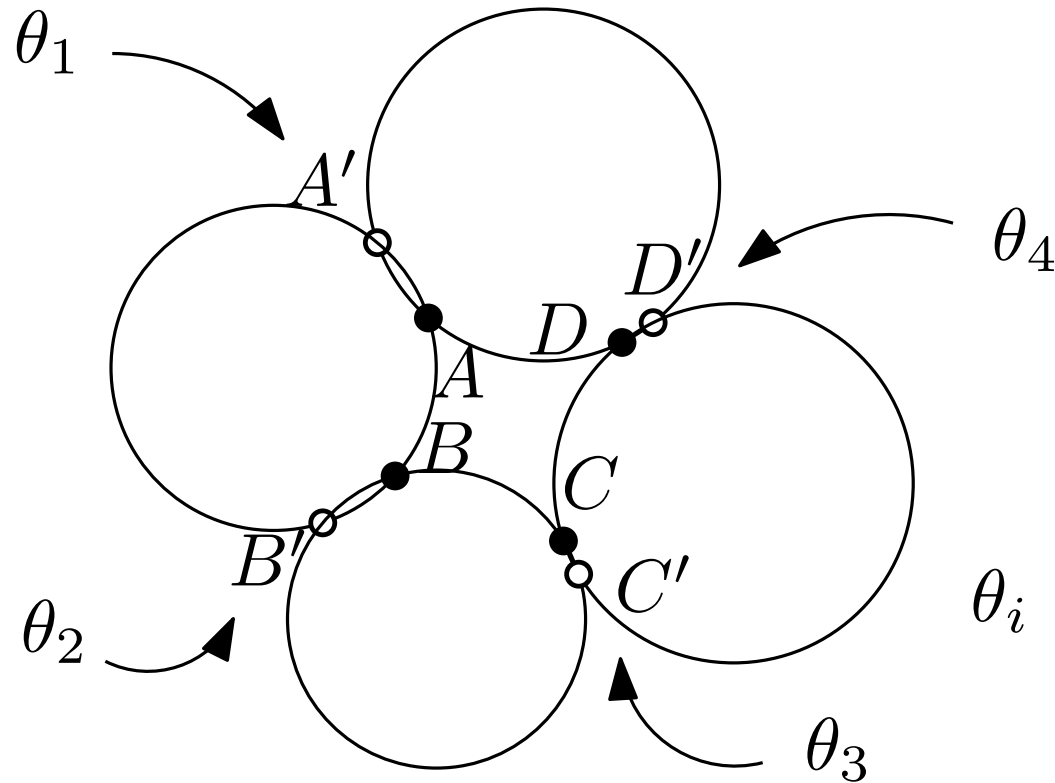


Théorème de Miquel



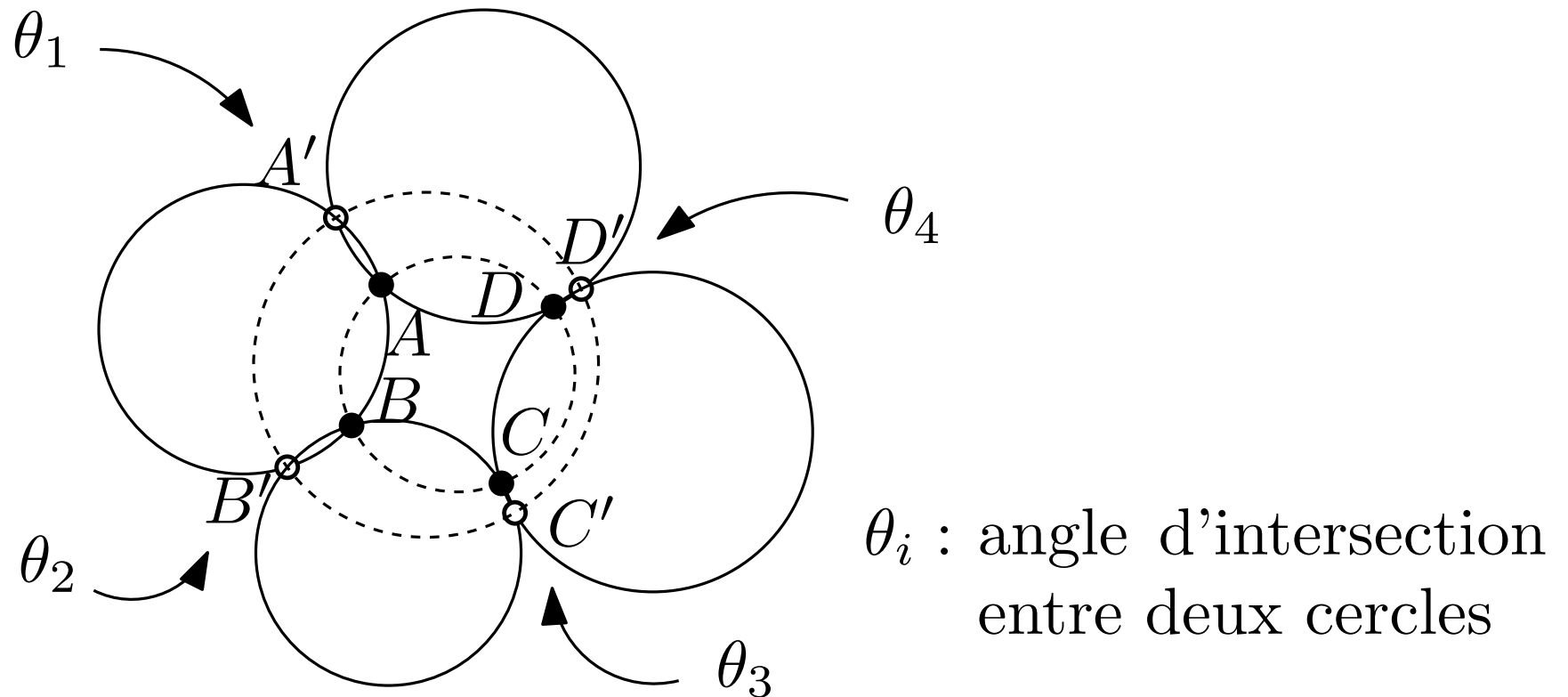
Théorème (Miquel, 1838). *Dans cette configuration, A, B, C, D cocycliques $\Leftrightarrow A', B', C', D'$ cocycliques.*

Théorème de Miquel

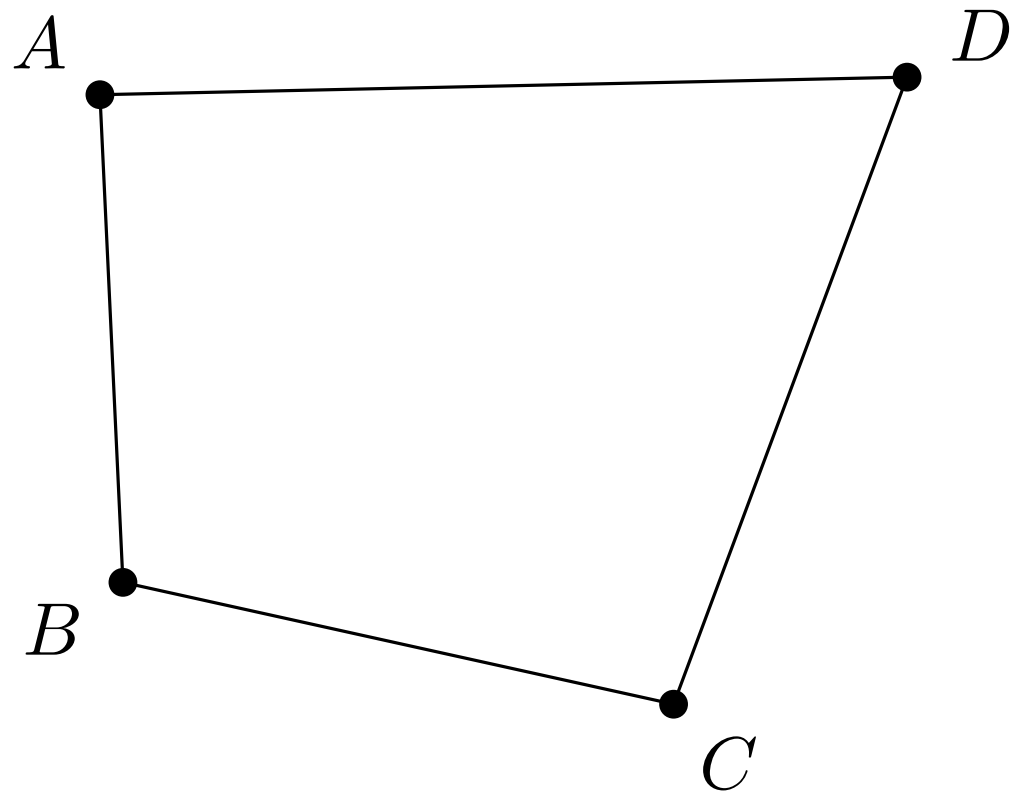


θ_i : angle d'intersection
entre deux cercles

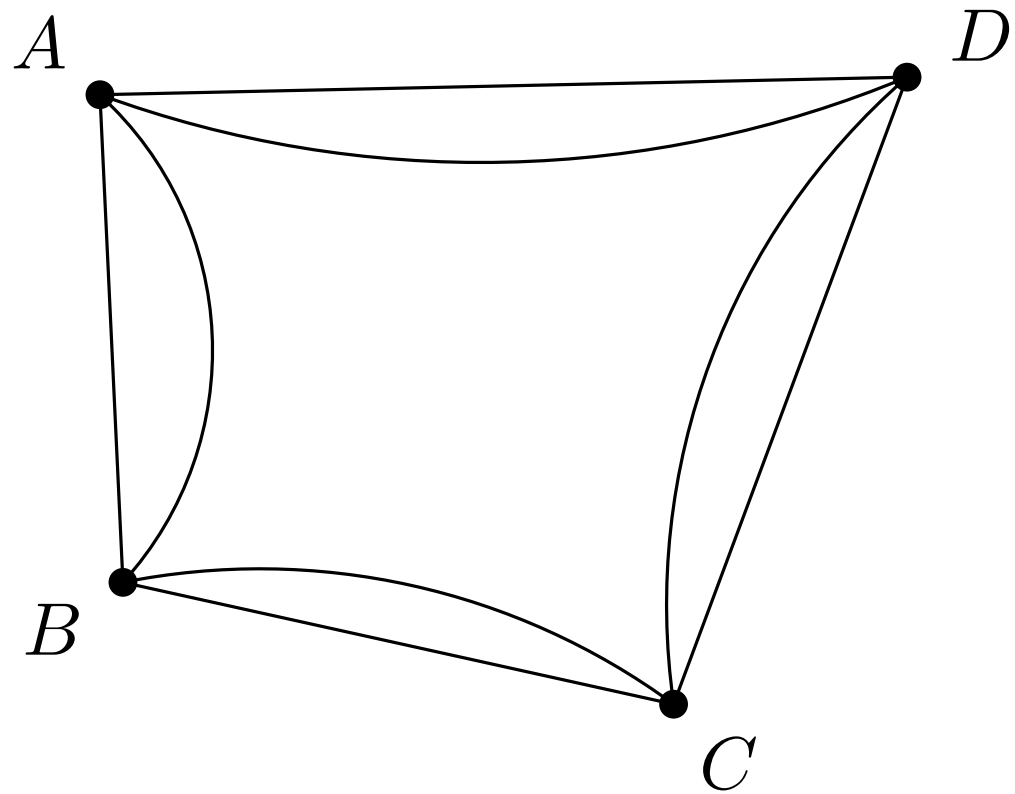
Théorème de Miquel



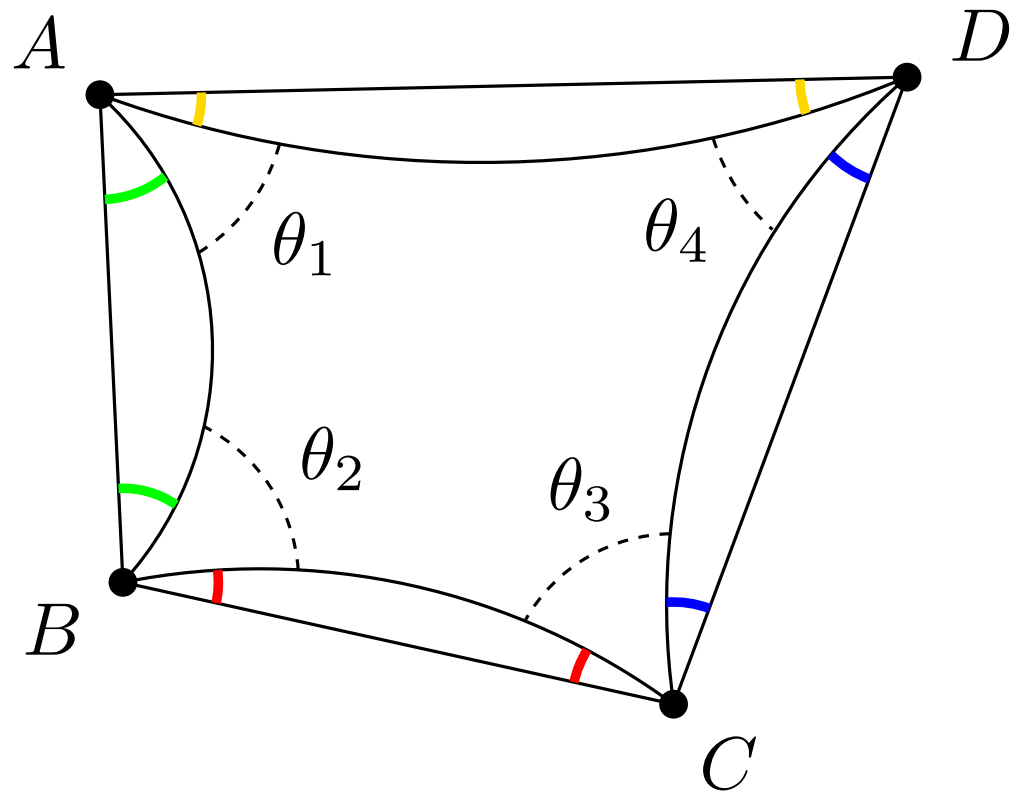
Théorème (R., 2017). $\theta_1 + \theta_3 = \theta_2 + \theta_4 \Leftrightarrow$
 A, B, C, D cocycliques $\Leftrightarrow A', B', C', D'$ cocycliques.



$$ABCD \text{ cocyliques} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$$



$ABCD$ cocyliques $\Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$



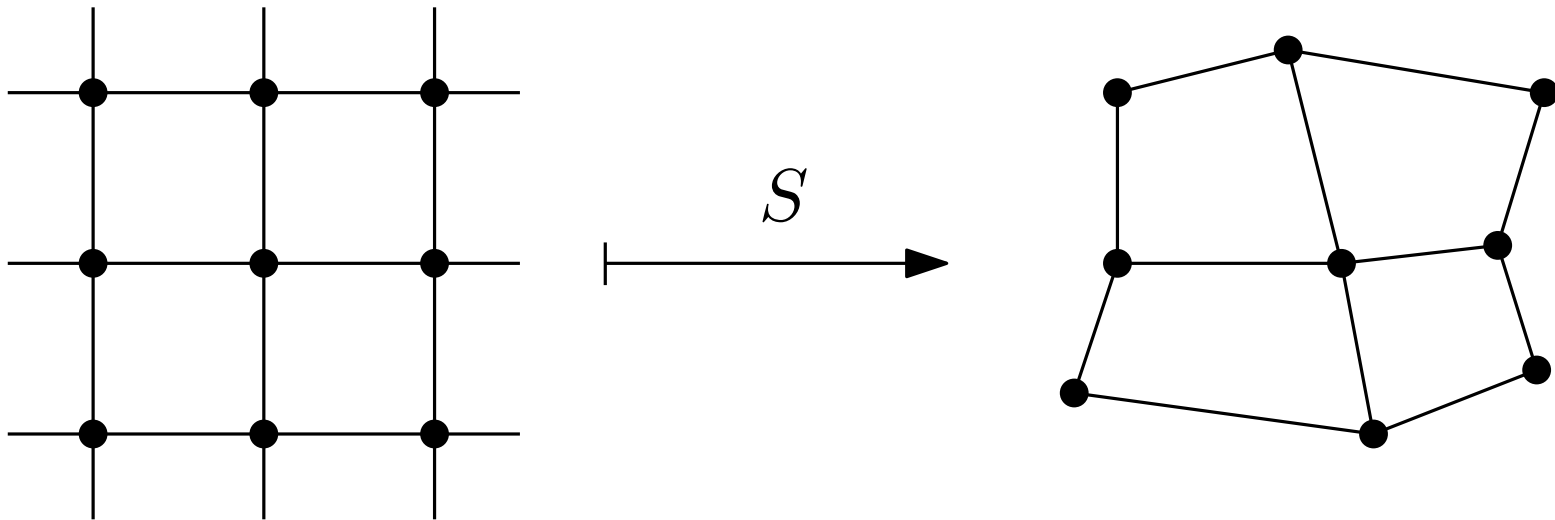
$$ABCD \text{ cocyliques} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$$

$$\hat{A} = \theta_1 + \text{green arc} + \text{yellow arc} \quad \hat{B} = \theta_2 + \text{red arc} + \text{green arc}$$

$$\hat{C} = \theta_3 + \text{blue arc} + \text{red arc} \quad \hat{D} = \theta_4 + \text{yellow arc} + \text{blue arc}$$

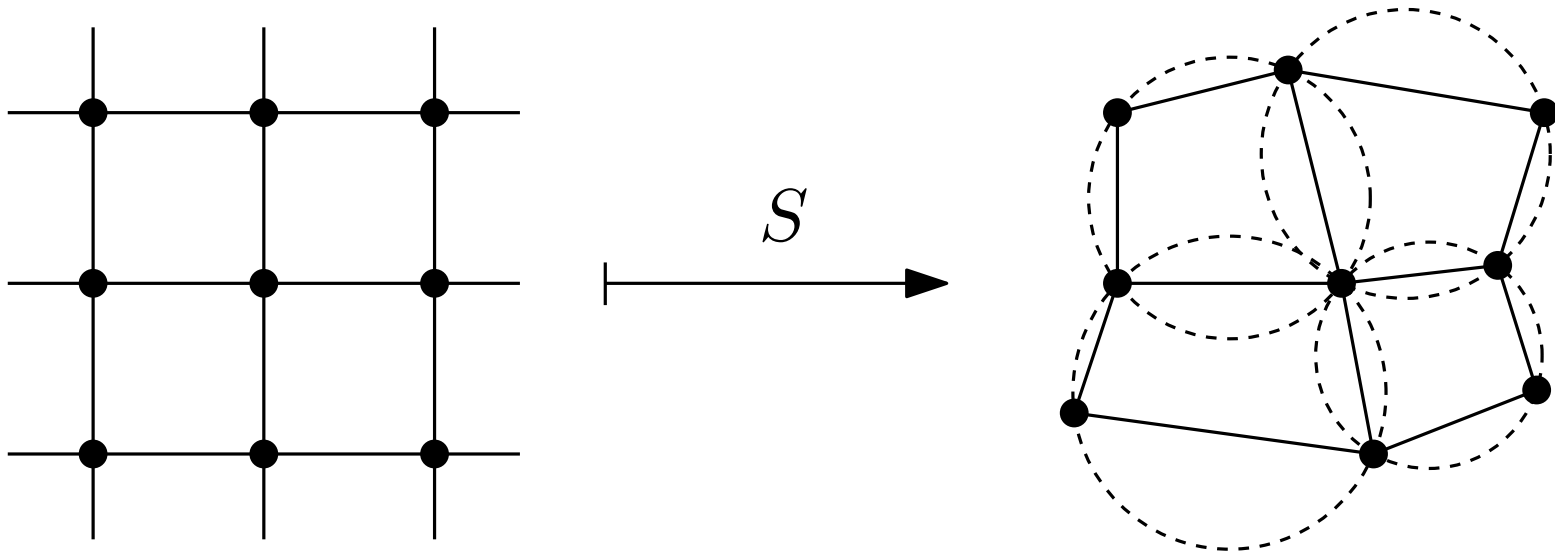
Agencements de cercles pour le réseau carré (ACRC)

- Un ACRC est une application $S : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que tout quadruplet de sommets autour d'une face soit envoyé sur quatre points cocycliques.

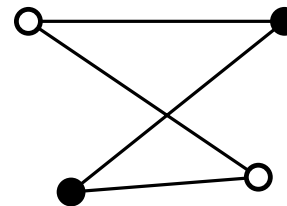
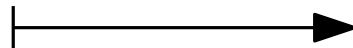
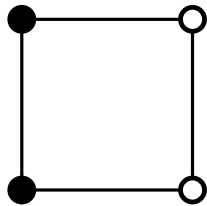
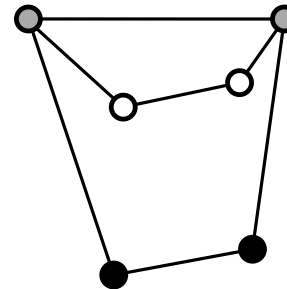
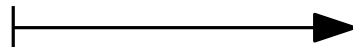
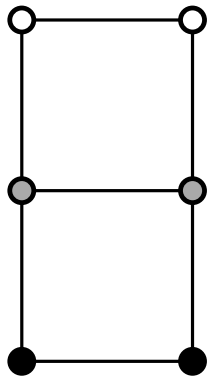


Agencements de cercles pour le réseau carré (ACRC)

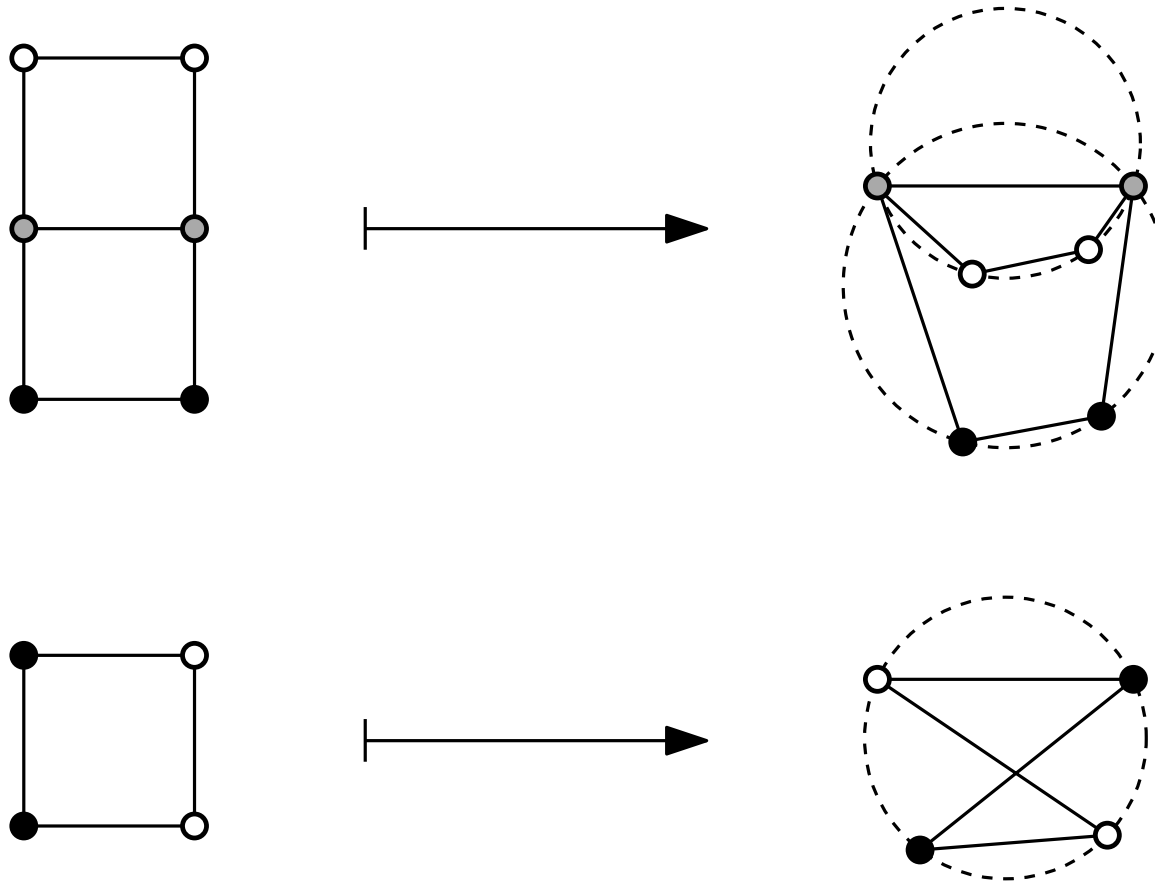
- Un ACRC est une application $S : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que tout quadruplet de sommets autour d'une face soit envoyé sur quatre points cocycliques.



- Plis et quadrilatères non convexes sont autorisés.

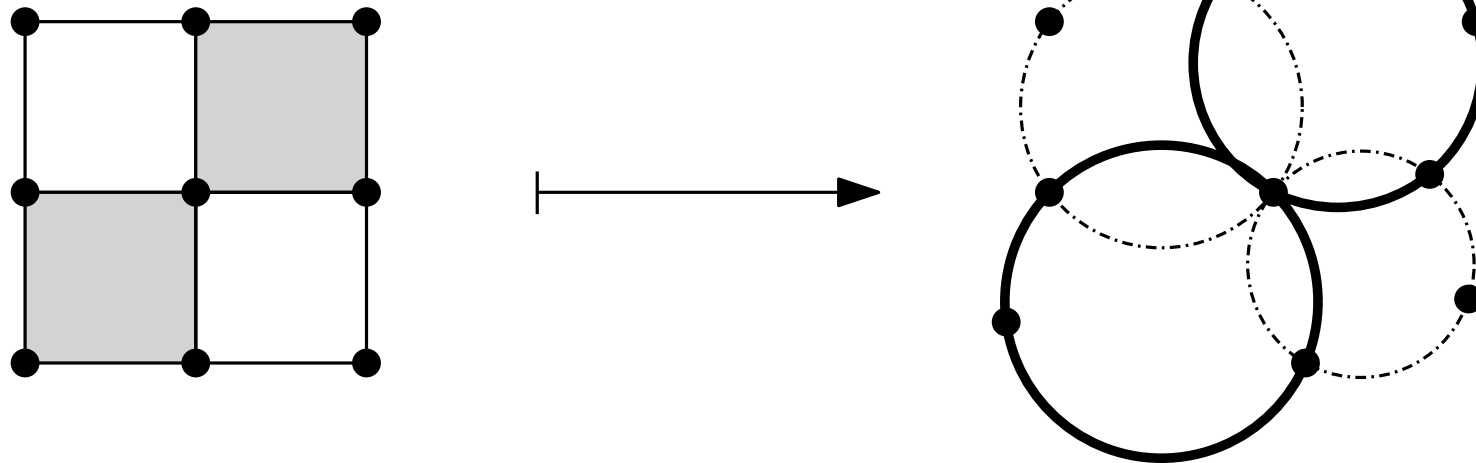


- Plis et quadrilatères non convexes sont autorisés.



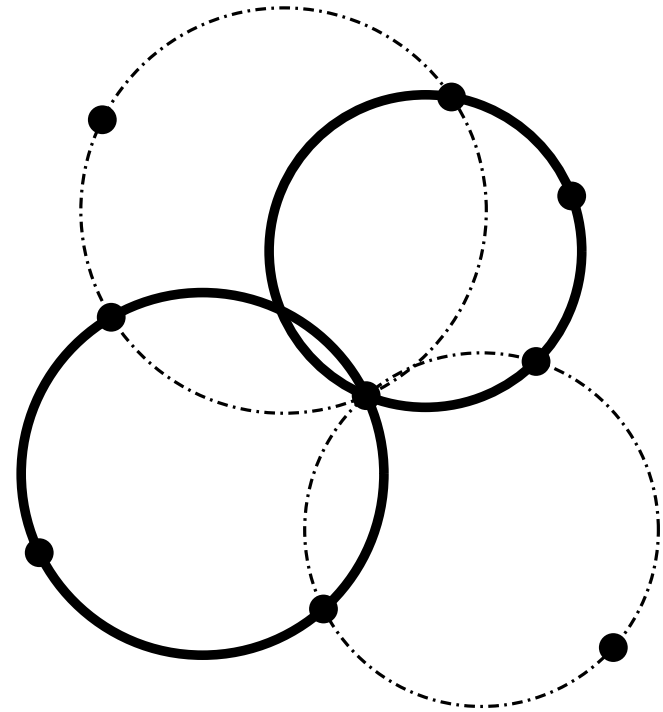
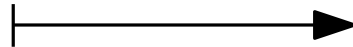
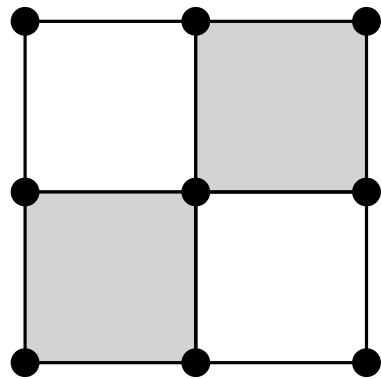
La dynamique de Miquel

- Coloriage en damier des faces de \mathbb{Z}^2 : cercles noirs et blancs.

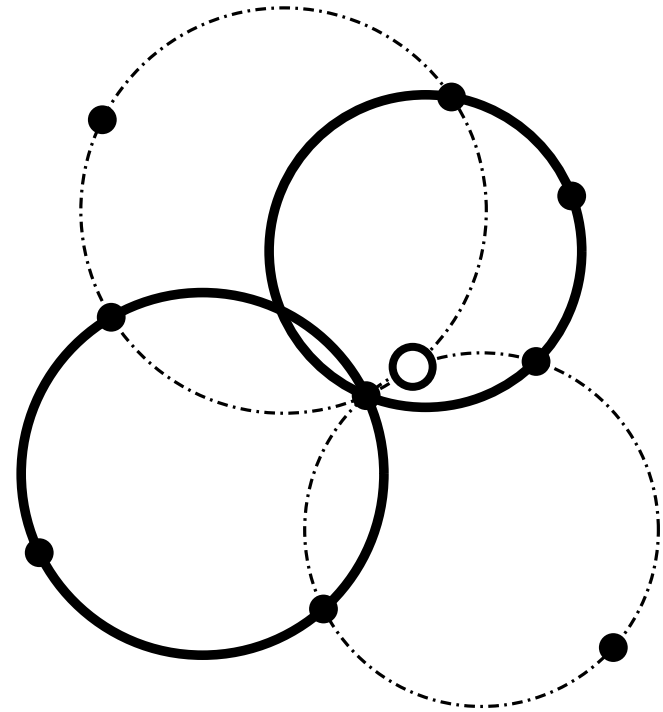
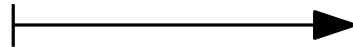
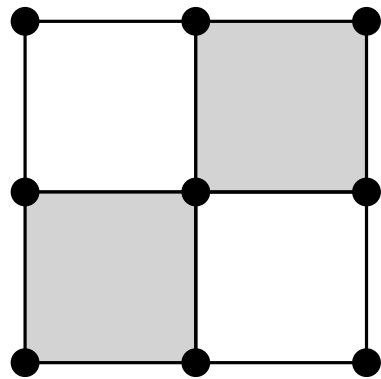


- On définit deux applications de l'ensemble des ACRC vers lui-même, la mutation noire μ_B et la mutation blanche μ_W .

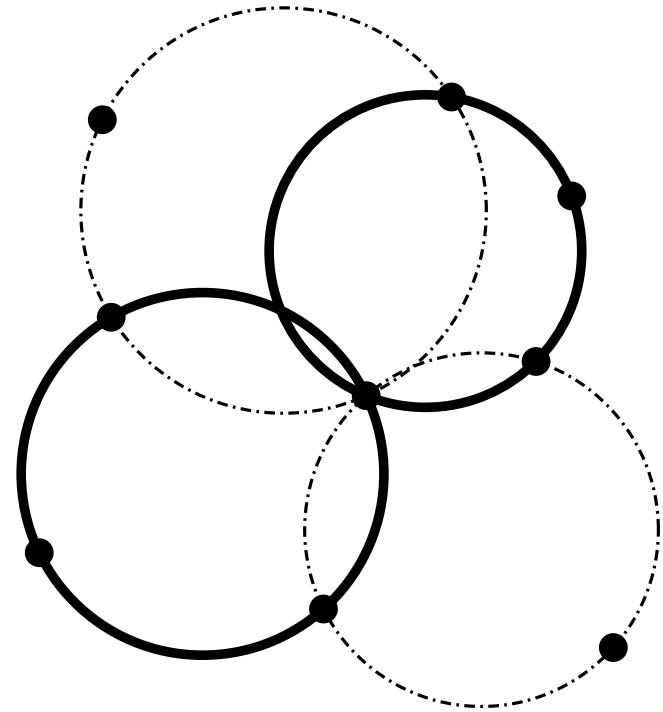
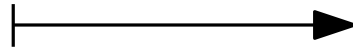
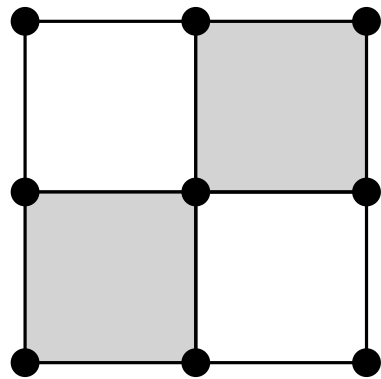
- Mutation noire μ_B : chaque sommet est envoyé sur l'autre point d'intersection des deux cercles blancs auxquels il appartient. Tous les sommets bougent simultanément.



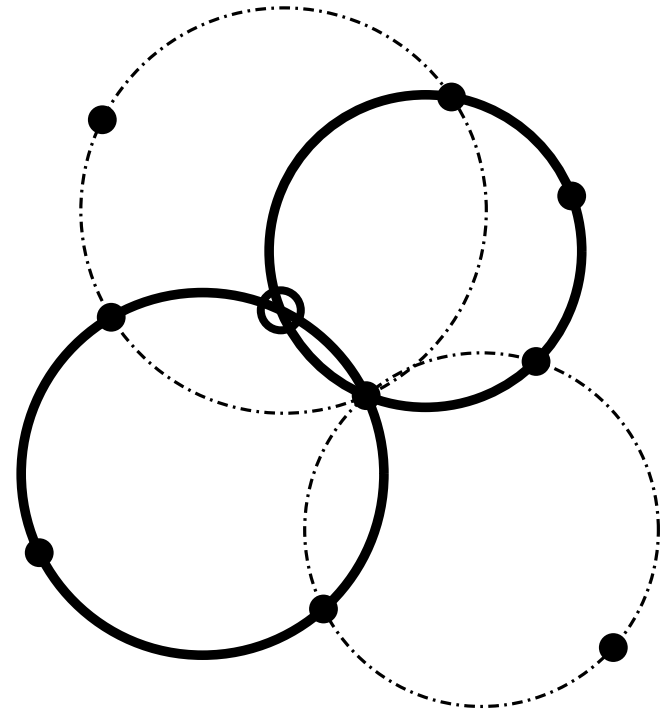
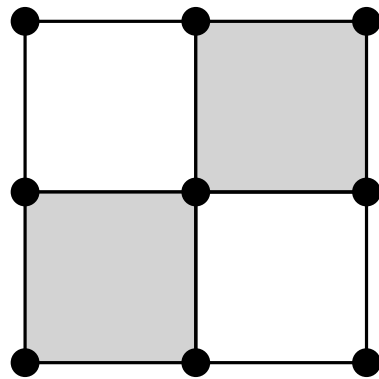
- Mutation noire μ_B : chaque sommet est envoyé sur l'autre point d'intersection des deux cercles blancs auxquels il appartient. Tous les sommets bougent simultanément.



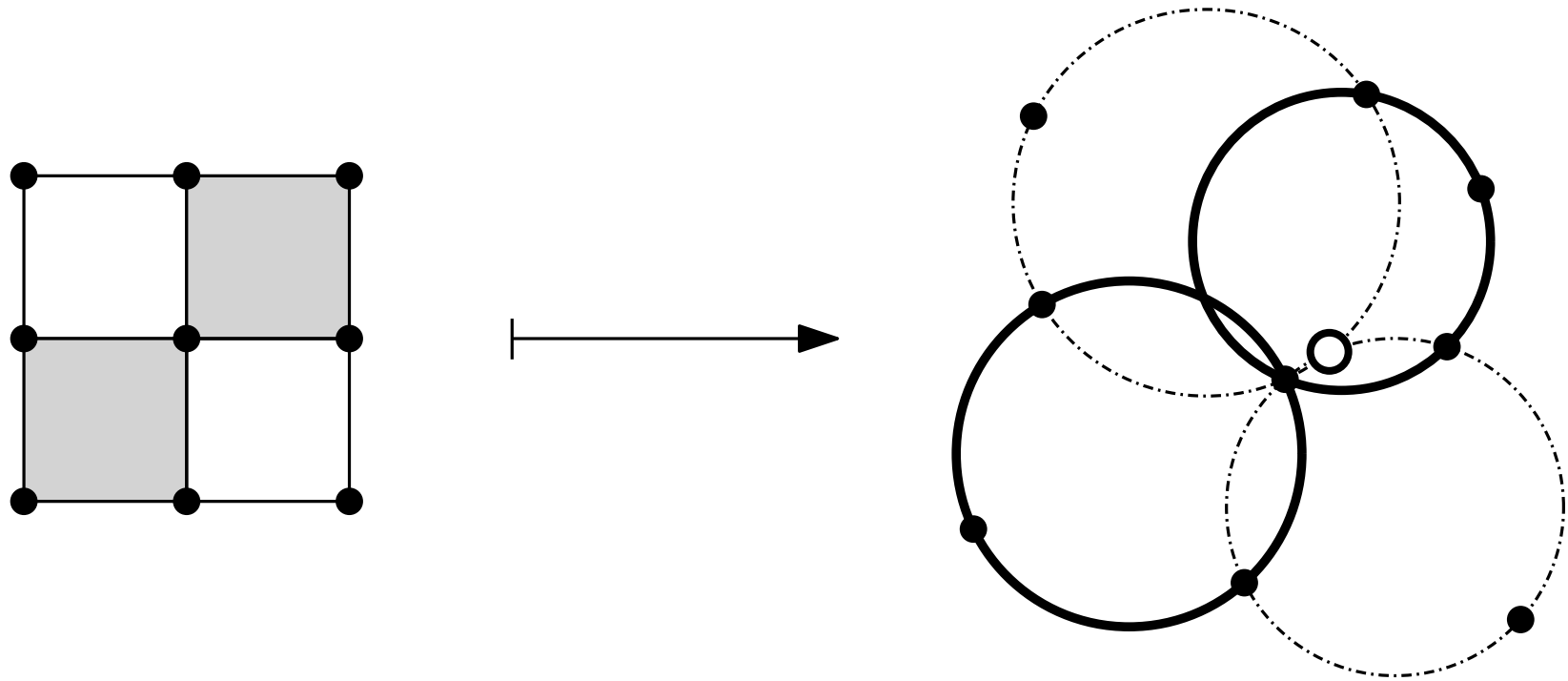
- Mutation noire μ_B : chaque sommet est envoyé sur l'autre point d'intersection des deux cercles blancs auxquels il appartient. Tous les sommets bougent simultanément.



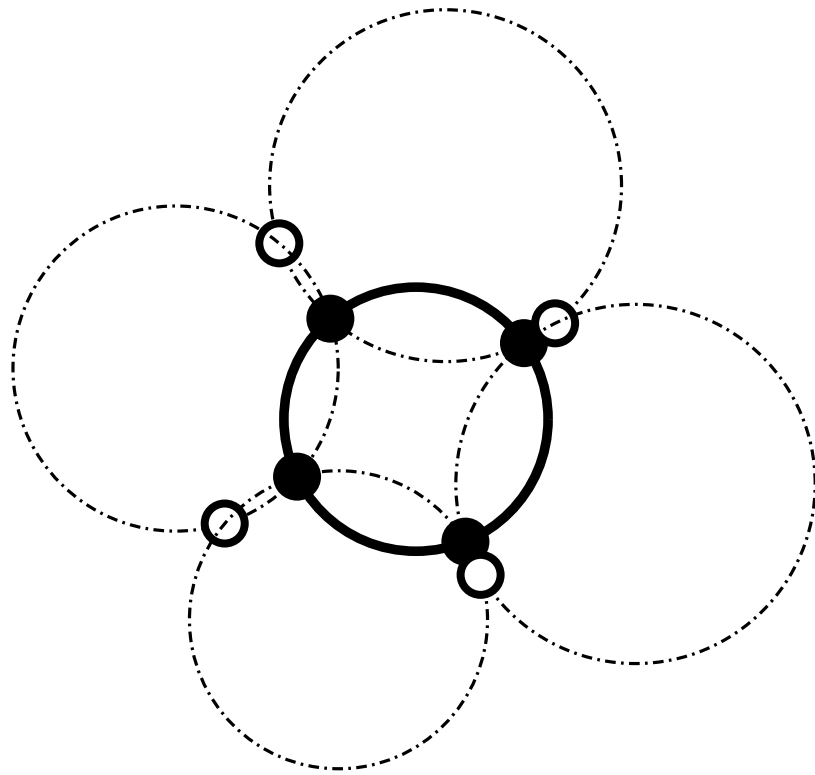
- Mutation noire μ_B : chaque sommet est envoyé sur l'autre point d'intersection des deux cercles blancs auxquels il appartient. Tous les sommets bougent simultanément.



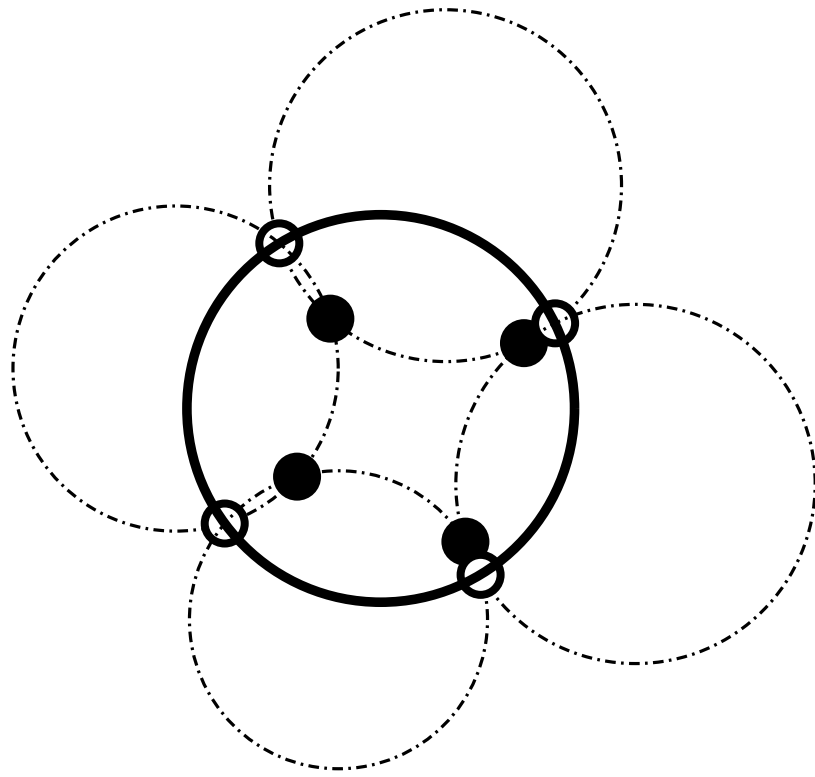
- Mutation noire μ_B : chaque sommet est envoyé sur l'autre point d'intersection des deux cercles blancs auxquels il appartient. Tous les sommets bougent simultanément.



- Pourquoi μ_B produit-elle un ACRC ?



- μ_B and μ_W sont des involutions.
- Dynamique de Miquel : dynamique à temps discret obtenue en alternant μ_B et μ_W .
- Inventée par Richard Kenyon.



Théorème de Miquel !

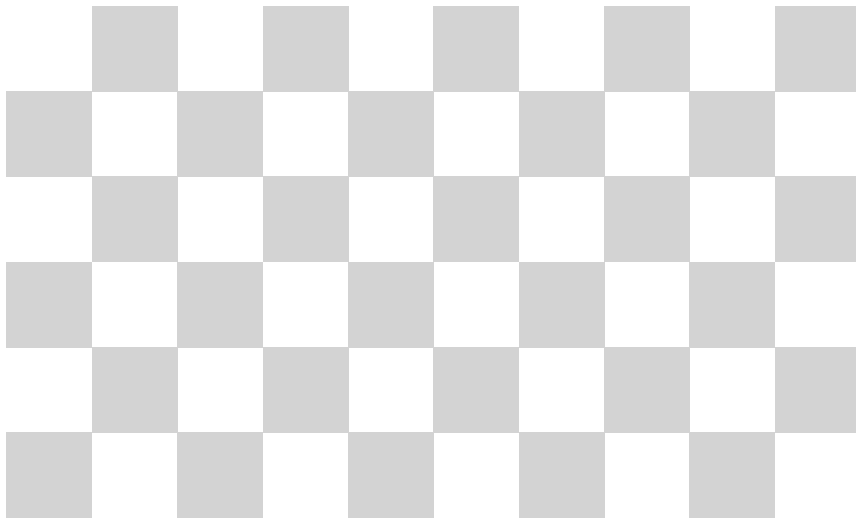
- μ_B and μ_W sont des involutions.
- Dynamique de Miquel : dynamique à temps discret obtenue en alternant μ_B et μ_W .
- Inventée par Richard Kenyon.

ACRC bipériodiques

- Un ACRC S est spatialement bipériodique s'il existe des entiers m, n et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$S(x + m, y) = S(x, y) + \vec{u}$$

$$S(x, y + n) = S(x, y) + \vec{v}$$



$$m = 4$$

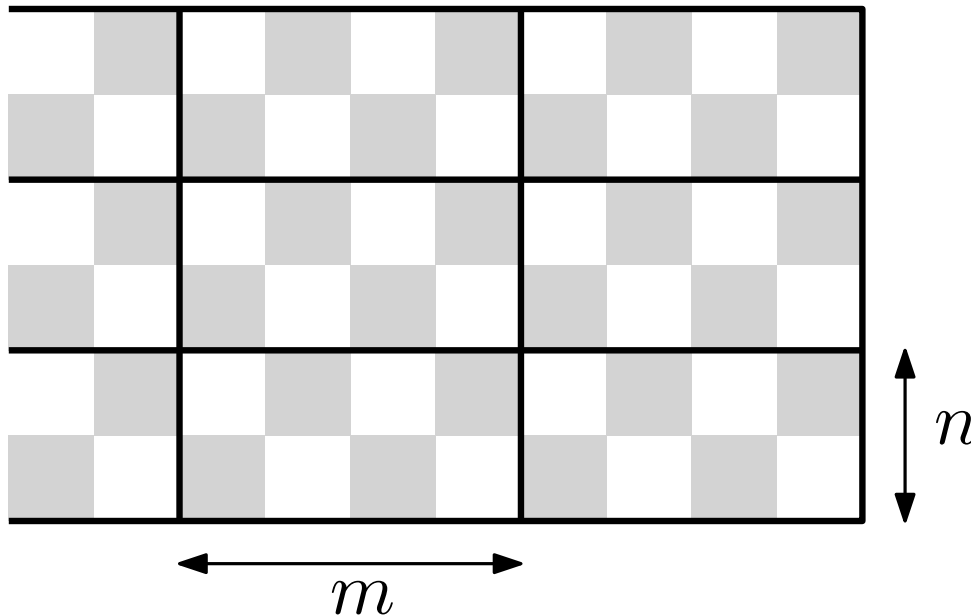
$$n = 2$$

ACRC bipériodiques

- Un ACRC S est spatialement bipériodique s'il existe des entiers m, n et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$S(x + m, y) = S(x, y) + \vec{u}$$

$$S(x, y + n) = S(x, y) + \vec{v}$$



$$m = 4$$

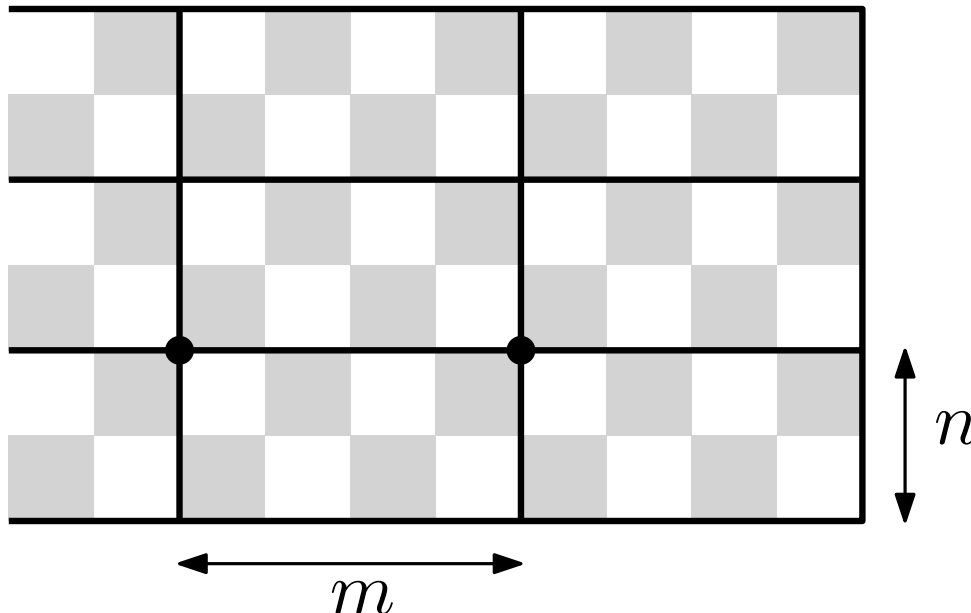
$$n = 2$$

ACRC bipériodiques

- Un ACRC S est spatialement bipériodique s'il existe des entiers m, n et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$S(x + m, y) = S(x, y) + \vec{u}$$

$$S(x, y + n) = S(x, y) + \vec{v}$$



$$m = 4$$

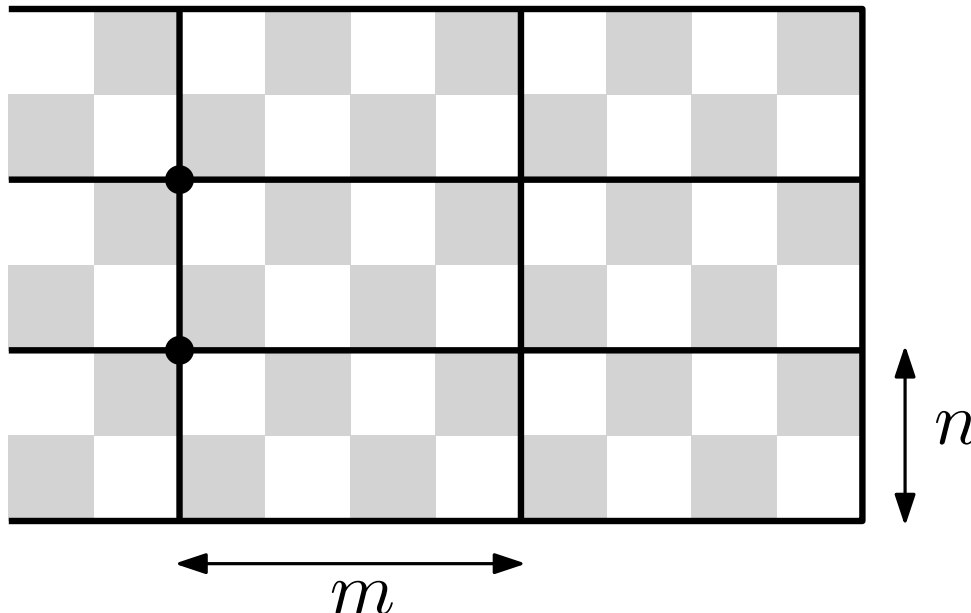
$$n = 2$$

ACRC bipériodiques

- Un ACRC S est spatialement bipériodique s'il existe des entiers m, n et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$S(x + m, y) = S(x, y) + \vec{u}$$

$$S(x, y + n) = S(x, y) + \vec{v}$$



$$m = 4$$

$$n = 2$$

- Le vecteur \vec{u} (resp. \vec{v}) est appelé monodromie dans la direction $(m, 0)$ (resp. $(0, n)$).
- Un ACRC bipériodique est envoyé par la dynamique de Miquel sur un autre ACRC bipériodique, avec les mêmes périodes et les mêmes monodromies.
- Réduction à un problème de dimension finie.
- Un agencement de cercles bipériodique sur le plan se projette sur un agencement de cercles sur un tore plat.

[Mathematica]

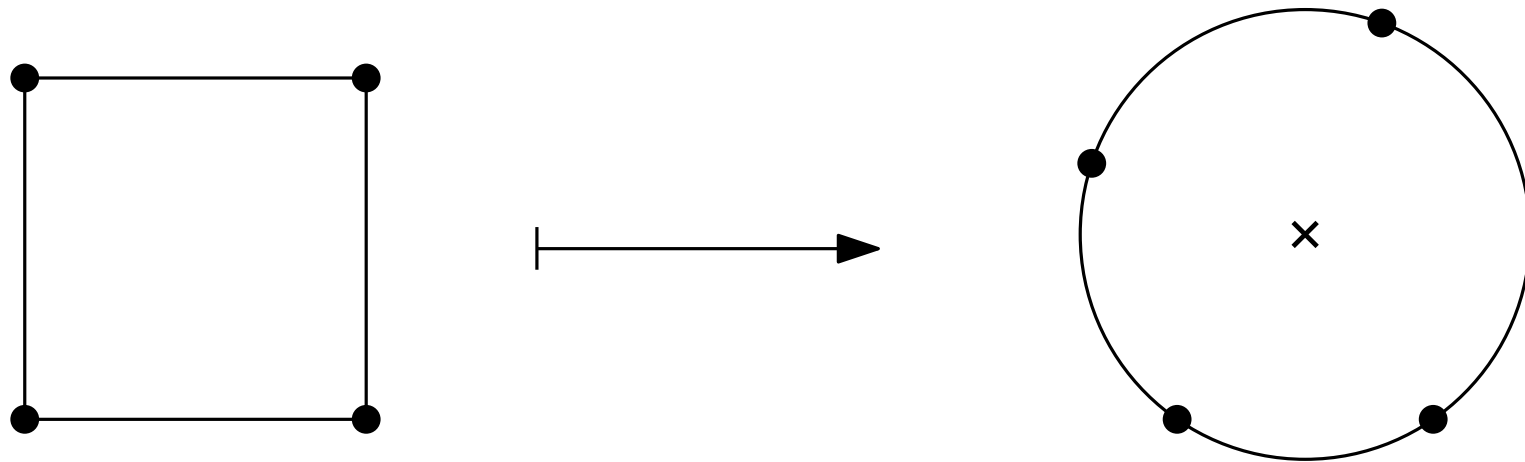
Motivation

- Forme limite du modèle de dimères : surface déterministe qui minimise une certaine tension de surface de condition au bord prescrite (Cohn-Kenyon-Propp).
- Pour les agencements de cercles, on peut calculer les rayons connaissant les angles d'intersection en résolvant un principe variationnel. Fonctionnelle minimisée analogue à celle des dimères (Rivin, Bobenko-Springborn).
- La dynamique de Miquel ressemble au système intégrable discret de Goncharov-Kenyon pour les dimères. Lien direct entre dimères et agencements de cercles ?

Quel espace d'ACRC ?

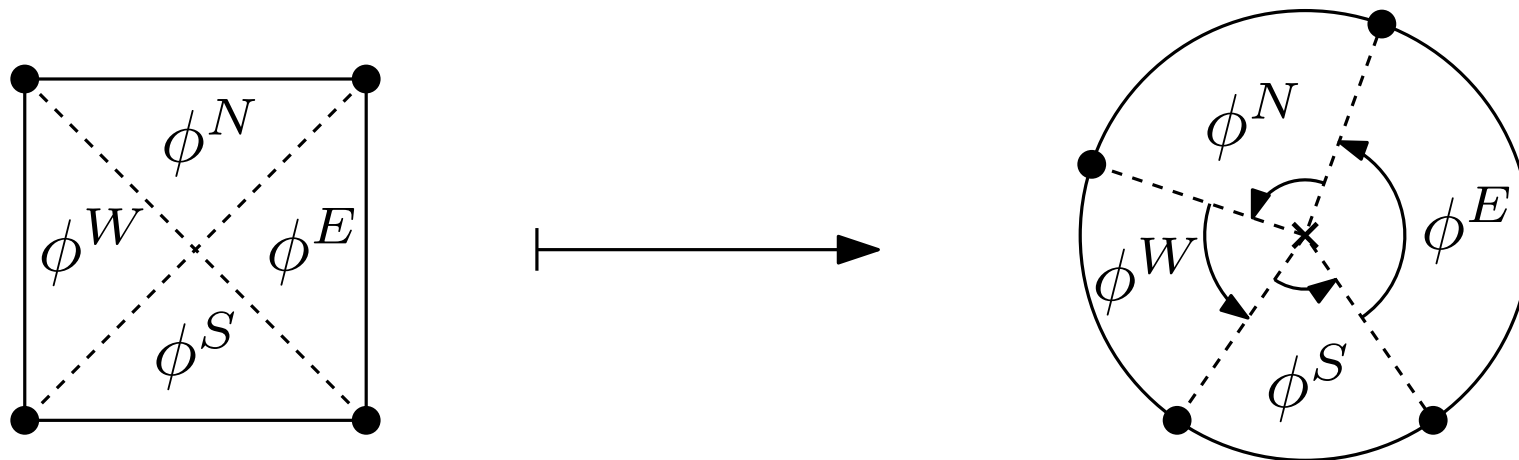
- Fixons m et n dans \mathbb{N}^* et considérons l'espace $\mathcal{M}_{m,n}$ des ACRC de périodes m et n , considérés à similitude près.
- Les ACRC dont les faces forment une décomposition cellulaire du tore (pas de plis ni quadrilatères non convexes) sont un ouvert de $\mathcal{M}_{m,n}$.
- Bobenko-Springborn (2004) : ce sous-espace ouvert d'ACRC est de dimension $mn + 1$.

Coordonnées sur $\mathcal{M}_{m,n}$



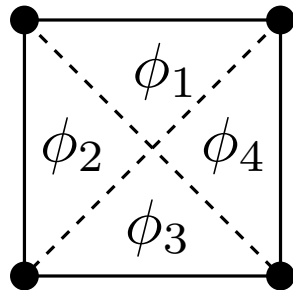
- Quatre variables ϕ dans chacune des mn faces du domaine fondamental.
- Il y a des relations entre ces variables.

Coordonnées sur $\mathcal{M}_{m,n}$

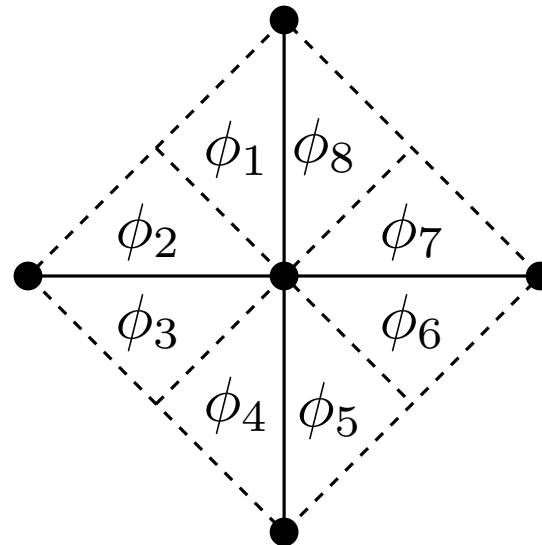


- Quatre variables ϕ dans chacune des mn faces du domaine fondamental.
- Il y a des relations entre ces variables.

- Courbure nulle à chaque face et sommet.
- Cohérence des rayons des cercles autour d'un sommet.



$$\sum_{i=1}^4 \phi_i = 2\pi$$



$$\sum_{i=1}^8 \phi_i = 4\pi$$

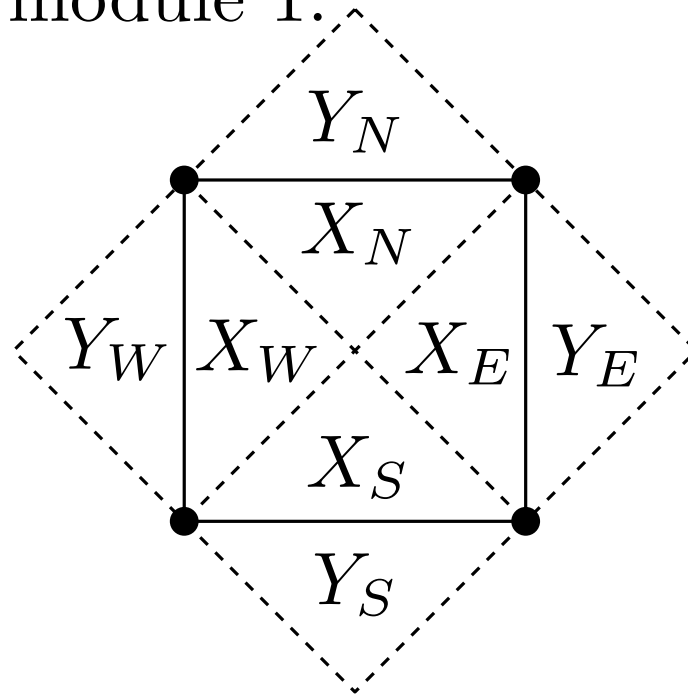
$$\frac{\sin \frac{\phi_1}{2} \sin \frac{\phi_3}{2} \sin \frac{\phi_5}{2} \sin \frac{\phi_7}{2}}{\sin \frac{\phi_2}{2} \sin \frac{\phi_4}{2} \sin \frac{\phi_6}{2} \sin \frac{\phi_8}{2}} = 1$$

- Courbure nulle à chaque face et sommet.
- Cohérence des rayons des cercles autour d'un sommet.
- Relations globales en faisant le tour du tore (cohérence des rayons et parallélisme des arêtes).

Théorème (R., 2017). *Les $4mn$ variables ϕ satisfaisant les relations ci-dessus constituent des coordonnées sur $\mathcal{M}_{m,n}$.*

Formules de récurrence locales

- On remplace les variables ϕ par $X = e^{i\phi}$, nombres complexes de module 1.



la face centrale
est noire

- Comment la mutation noire agit-elle sur les X_i et Y_i ?

$$Y'_N = Y_N \frac{\left(1 - \frac{(1-X_W^{-1})(1-Y_N^{-1})}{(1-Y_W)(1-X_N)}\right) \left(1 - \frac{(1-X_E^{-1})(1-Y_N^{-1})}{(1-Y_E)(1-X_N)}\right)}{\left(1 - \frac{(1-X_W)(1-Y_N)}{(1-Y_W^{-1})(1-X_N^{-1})}\right) \left(1 - \frac{(1-X_E)(1-Y_N)}{(1-Y_E^{-1})(1-X_N^{-1})}\right)}$$

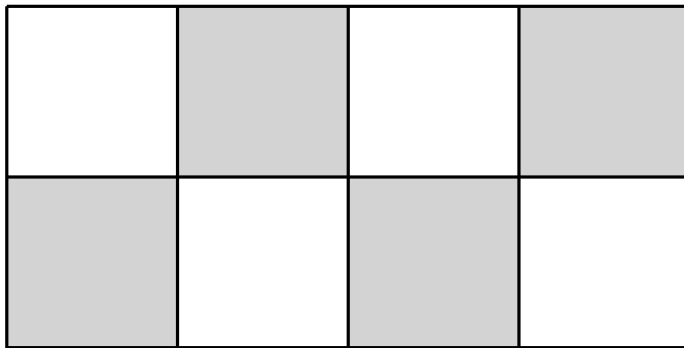
$$X'_N = \frac{1 - \frac{(1-X_N^{-1})(1-Y_W^{-1})(1-Y_N'^{-1})}{(1-Y_N)(1-X_W)(1-Y_W')}}{1 - \frac{(1-X_N)(1-Y_W)(1-Y_N')}{(1-Y_N^{-1})(1-X_W^{-1})(1-Y_W'^{-1})}}$$

- Rappelle les mutations de rapports de variables amassées dans les algèbres amassées.

Quantités conservées

- La paire de vecteurs de monodromie (\vec{u}, \vec{v}) à similitude près (deux quantités conservées réelles).
- Des sommes signées d'angles d'intersection le long de cycles sur le tore.

- On trace le graphe dual au réseau carré sur le tore et on oriente les arêtes duales horizontales (resp. verticales) de blanc vers noir (resp. de noir vers blanc).

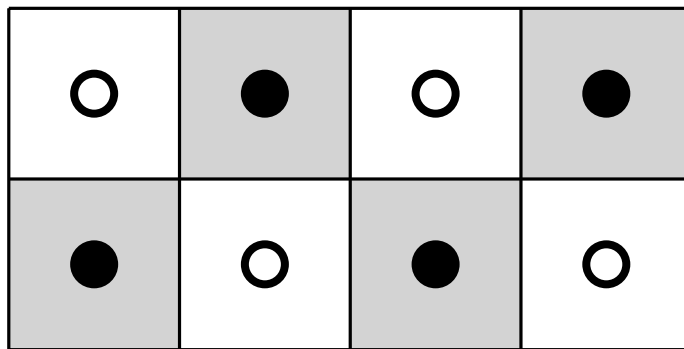


$$m = 4$$

$$n = 2$$

- Pour tout cycle orienté l dessiné sur le graphe dual, on définit $\gamma(l) = \sum_{e \in l} \pm \theta_e$.

- On trace le graphe dual au réseau carré sur le tore et on oriente les arêtes duales horizontales (resp. verticales) de blanc vers noir (resp. de noir vers blanc).

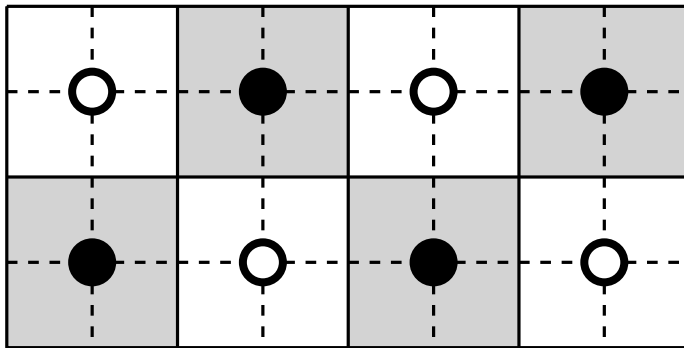


$$m = 4$$

$$n = 2$$

- Pour tout cycle orienté l dessiné sur le graphe dual, on définit $\gamma(l) = \sum_{e \in l} \pm \theta_e$.

- On trace le graphe dual au réseau carré sur le tore et on oriente les arêtes duales horizontales (resp. verticales) de blanc vers noir (resp. de noir vers blanc).

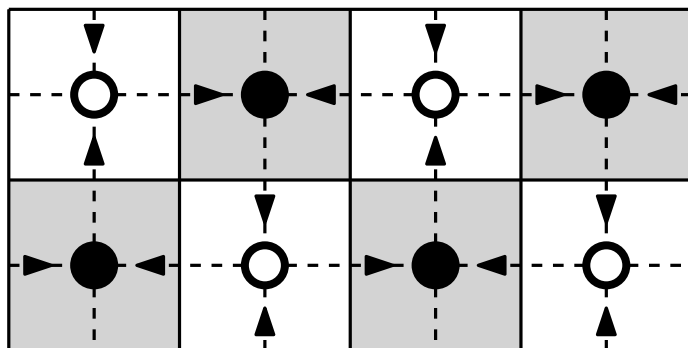


$$m = 4$$

$$n = 2$$

- Pour tout cycle orienté l dessiné sur le graphe dual, on définit $\gamma(l) = \sum_{e \in l} \pm \theta_e$.

- On trace le graphe dual au réseau carré sur le tore et on oriente les arêtes duales horizontales (resp. verticales) de blanc vers noir (resp. de noir vers blanc).

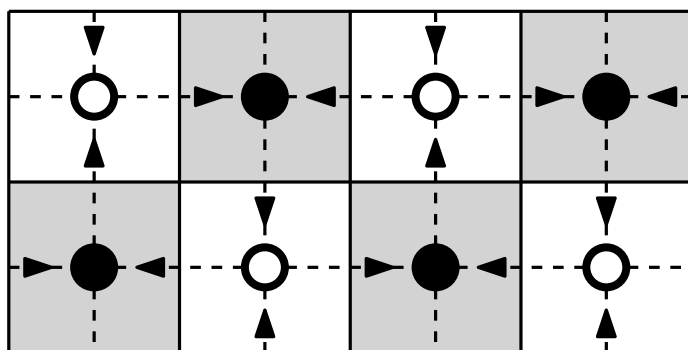


$$m = 4$$

$$n = 2$$

- Pour tout cycle orienté l dessiné sur le graphe dual, on définit $\gamma(l) = \sum_{e \in l} \pm \theta_e$.

- On trace le graphe dual au réseau carré sur le tore et on oriente les arêtes duales horizontales (resp. verticales) de blanc vers noir (resp. de noir vers blanc).



$$m = 4$$

$$n = 2$$

- Pour tout cycle orienté l dessiné sur le graphe dual, on définit $\gamma(l) = \sum_{e \in l} \pm \theta_e$.

\uparrow angle d'intersection associé à e
 \uparrow moins si on traverse e à contre-sens

- $\gamma(l)$ ne dépend que de la classe d'homologie de l sur le tore. On peut voir γ comme un morphisme de groupes de $H_1(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

Théorème (R., 2017). *La mutation noire et la mutation blanche changent γ en $-\gamma$.*

- Donne deux quantités conservées indépendantes.

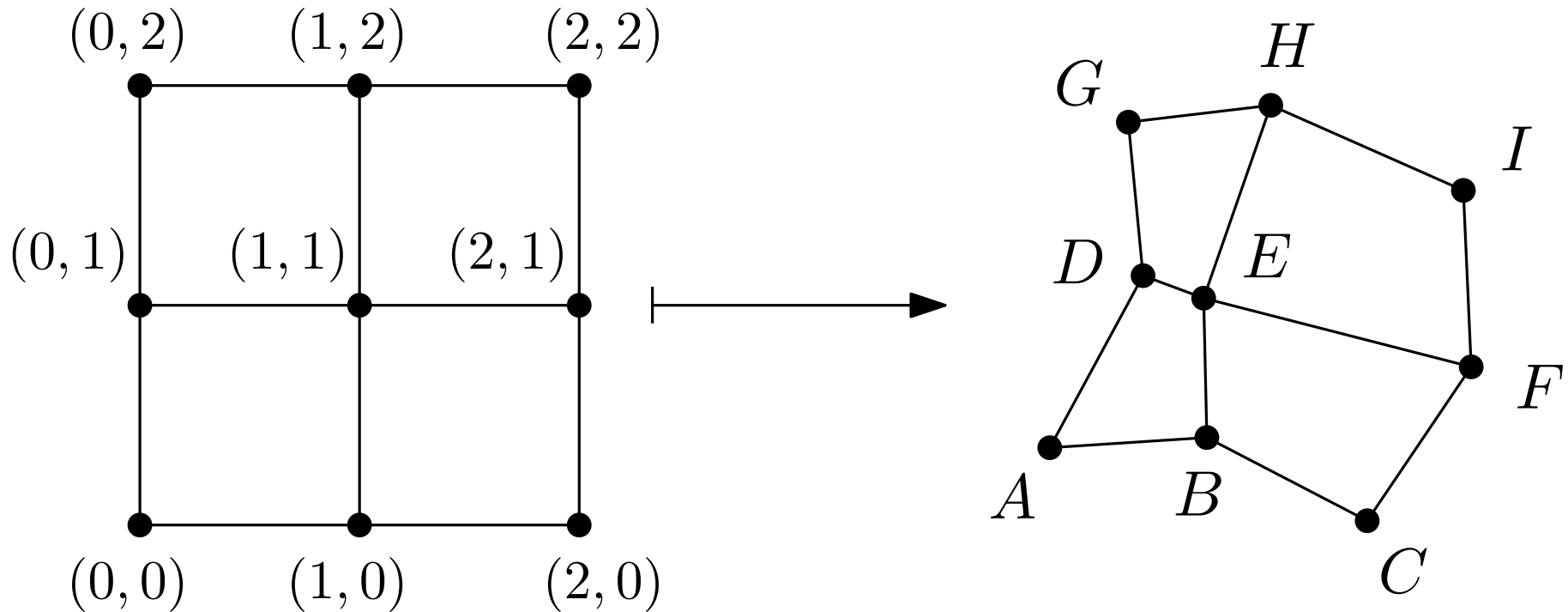
Agencements isoradiaux

- Un ACRC est dit isoradial si tous les cercles ont le même rayon.

Théorème (R., 2017). *Les agencements isoradiaux dans $\mathcal{M}_{m,n}$ sont des points périodiques, de période commune dépendant de m et n .*

- La dynamique de Miquel pour les agencements isoradiaux coïncide avec la dynamique des dimères pour des graphes isoradiaux.
- Quand $(m, n) = (2, 1)$ ou $(m, n) = (4, 1)$, tout ACRC est isoradial.

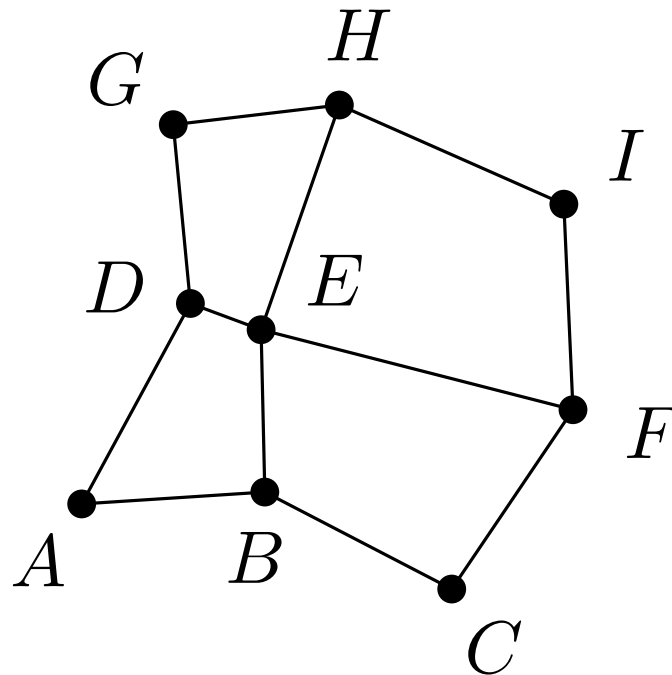
Le cas 2×2



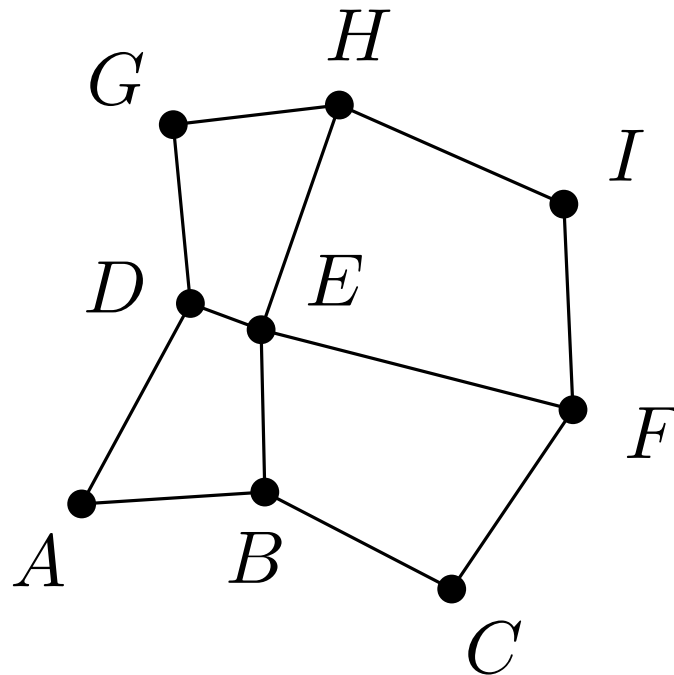
- Construction d'un ACRC 2×2 : choix libre de B, D, F, H dans le plan, choix libre de E sur l'hyperbole équilatère passant par B, D, F, H et extension à un ACRC de monodromies $\vec{u} = \overrightarrow{DF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BH}$.

[Geogebra]

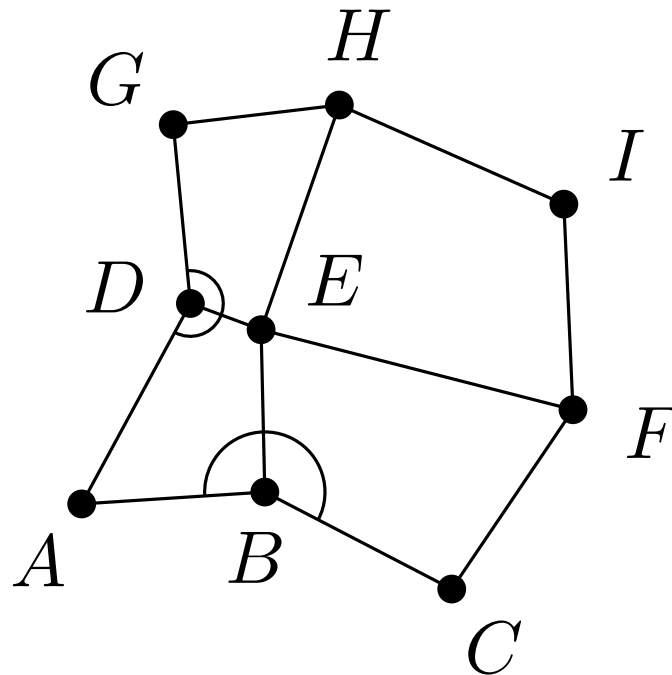
- Déplacement absolu : quand on itère la dynamique de Miquel, tous les points dérivent en général vers l'infini.



- Déplacement relatif : on applique μ_B ou μ_W et on translate pour ramener A à sa position initiale.
- A, C, G et I sont des points fixes.



- Déplacement relatif : on applique μ_B ou μ_W et on translate pour ramener A à sa position initiale.
- A, C, G et I sont des points fixes.
- B, D, F et H se déplacent sur des arcs de cercles.



Courbe quartique pour E

- Partant d'un ACRC 2×2 , on construit de façon élémentaire trois points Ω, P, P' (voir ci-après).

Théorème (R., 2017). *E se déplace le long de la courbe quartique \mathcal{Q} définie comme le lieu des points M tels que*

$$PM^2P'M^2 - \lambda\Omega M^2 = k,$$

où λ et k sont choisis de telle sorte que A, C, G et I soient sur la courbe.

[Geogebra]

puis

[Mathematica]

Courbes quartiques binodales

- Pour des coordonnées centrées en Ω telles que P soit sur l'axe des abscisses, \mathcal{Q} a une équation de la forme

$$(X^2 + Y^2)^2 + aX^2 + bY^2 + c = 0$$

- En tant que courbe dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, la quartique \mathcal{Q} a deux nœuds, les points cycliques à l'infini $(1 : i : 0)$ et $(1 : -i : 0)$, donc son genre géométrique vaut 1.

Théorème (Glutsyuk-R., 2017). *Pour toute courbe quartique binodale \mathcal{C} de nœuds P_1 et P_2 , la loi de groupe sur \mathcal{C} peut être définie en utilisant des coniques passant par P_1, P_2 et un point de base fixé $P_0 \in \mathcal{C}$: on décrète que les trois autres points d'intersection de la conique avec \mathcal{C} sont de somme nulle.*

Conjecture (Glutsyuk-R., 2017). *Soit E'_w (resp. E'_b) la position renormalisée de E après mutation blanche (resp. noire). Alors la dynamique de Miquel est une translation sur \mathcal{Q} :*

$$E'_w = -E - 2A$$

$$E'_b = -E - 2C$$

[Geogebra]
cubique puis quartique

(puis la fin)